



**DELHI UNIVERSITY
LIBRARY**

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl No 82

168N/9.2

Ac. No. 3806

24 FEB 1962

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of 5 Paise will be collected for each day the book is kept overtime.

سلسلہ سید عالم علیہ السلام

جبر و مقابلہ

حصہ دوم

(برائے انٹرمیڈیٹ)

(محققہ ہال اینڈ ٹائٹ)

مترجمہ

مولوی شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضی گلینہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۲۶ھ م ۱۳۴۰ھ م ۱۹۲۸ء

طبعہ جامعہ عثمانیہ علیہ السلام

380b

یہ کتاب سکیلن کمپنی کی اجازت سے جن کو
حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں،
طبع کی گئی ہے

دیباچہ

جبر و مقابلہ

حصہ دوم

اس کتاب کو ابتدائی جبر و مقابلہ پر اے مدارس فوقانیہ کے سلسلہ میں تصور کرنا چاہیے۔ پہلے چند ابواب کو نسبت، تناسب، تغیر اور سلسلوں پر زیادہ مفصل بحث کے لئے مخصوص کر دیا گیا ہے جن پر ابتدائی جبر و مقابلہ میں سطحی طور پر بحث کی گئی تھی بناءً علیہ ہم نے کتاب ہذا میں ایسے مسائل اور مشقیں مندرج کی ہیں جن کا اندراج ابتدائی کتاب میں نامناسب تھا۔

اس لحاظ سے اس کتاب کا میدان طالب علم کے لئے تقریباً نیا تصور ہو سکتا ہے اور اس کے مضامین کی وسعت خاص اہمیت رکھتی ہے۔ ان مضامین پر ہم نے عمیق اور بسیط بحث کرنے کی کوشش کی ہے اور ہر دو مسائل اور مشقوں کو پوری تفصیل سے پیش کیا گیا ہے اور ایسا کرنا ہمارے ذاتی تعلیمی تجربہ کی بنا پر ضروری معلوم ہوتا ہے۔ اس کتاب میں ہمارا مقصد یہ رہا ہے کہ مضمون کے جملہ ضروری حصوں پر ایسی بسیط و شرح سے بحث کی جائے جو ایک جلد کی ضخامت کے لحاظ سے ناموزوں نہ ہو لیکن آخر کے بعض ابواب میں جگہ کی قلت کی وجہ سے مضمون کا محض سرسری خاکا پیش کرنا ہی ممکن ہو سکا ہے۔ منجملہ ذکر صورتوں میں ہم نے صرف اس غایت کو ملحوظ رکھا ہے کہ ابتدائی تعلیم کے اغراض کے مطابق مضمون کی محض سطحی تشکیل کر دی جائے اور عمیق تعلیم کے لئے طالب علم کو خاص خاص کتابوں کے مطالعہ کے لئے ہدایات دیے جائیں۔

ترتیب و اجتماع کے باب میں ہم ریوسرنڈ ڈبلیو۔ اے۔ وٹ دہرٹھ کے نہایت مہربان احسان ہیں جنہوں نے ہمیں ازراہ کرم اپنی کتاب Choice and Chance میں کے ثبوتوں کے استعمال کرنے کی اجازت دی۔ کئی ساوں تک ہم نے تعلیم دینے میں انہی ثبوتوں کو استعمال کیا ہے۔ اور چونکہ ان کا استدلال عام عقل اور ابتدائی اصولوں پر مبنی ہے اس لئے ہمیں یقین ہے کہ ان ثبوتوں کی بنیاد پر جبر و مقابلہ کے اس حصہ کو سمجھنے میں مبتدی کو زیادہ آسانی ہوگی بہ نسبت ایسے ثبوتوں کے جو بالعموم جبر و مقابلہ کی دیگر کتب نصاب میں پائے جاتے ہیں۔

استدقائق اور اتساع کی بحث ہمیشہ مبتدی کے لئے پہلی مرتبہ قدرے مشکل معلوم ہوتی ہے اس میں شک نہیں کہ اس مضمون کی اندرونی مشکلات درحقیقت زیادہ ہیں۔ احاطہ ٹریاضی میں عام طور پر جو اہمیت اس کو دیجاتی ہے اور جس نامکمل طریق پر اسے بحث میں لایا جاتا ہے ان ہر دو وجوہ کی بنا پر یہ مشکلات اور بھی بڑھ جاتی ہیں۔ اس بنا پر اس باب کو ہم نے معمول سے ذرا بعد میں رکھا ہے۔ اس کے حصوں کی تشکیل اور ترتیب میں، نیز متن کی توضیح کے لئے مناسب مسئلہ کے انتخاب میں نہایت غور و خوض سے کام لیا گیا ہے اور ہم نے اس سے پہلے انتہائی قیمتوں اور معمولی کمزور کے دو ابواب درج کر دینے سے اس کو حتیٰ الوسع زیادہ دلچسپ اور سہل بنانے کی کوشش کی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنے سے باب میں ہم نے ”فرقوں کے طریقہ“ پر اور نیز اس کی وسیع اور اہم مثالوں پر بہت زور دیا ہے۔ اس طریقہ کی بنیاد محدود فرقوں کے احصاء میں ایک نہایت مشہور ضابطہ پر مبنی ہے جس کو خالص جبر و ثبوت کے بغیر جبر و مقابلہ کے درس میں داخل کرنا نامناسب معلوم ہوتا ہے۔ محدود فرقوں کے ضابطہ کا جو ثبوت ہم نے دفعات ۳۹۵ اور ۳۹۶ میں دیا ہے اس کے متعلق ہمارا خیال ہے کہ یہ بالکل نیا اور وسیع زاد ہے اور اس ضابطہ کے مطابق ”فرقوں کے طریقہ“ کی تشریح کے ضمن میں ہم نے سلسلوں کی چند ایسی دلچسپ

مثالیں درج کی ہیں جن کو اس کے بغیر بہت دیر تک ملتوی رکھنا پڑتا تھا۔
 احتمال کے باب میں ہمیں ریورنڈ ٹی۔ سی۔ سمنز - کرائسٹ کالج
 بریکن سے نہایت اہم اور قابلِ امداد ملی ہے۔ اور ہم تیرہ دل سے اُن کے
 ممنون ہیں نہ صرف اس لئے کہ انہوں نے کتاب پر بحثہ سنجی کر کے اس کی اصلاح
 فرمائی بلکہ اس لئے بھی کہ انہوں نے بہت سی دلچسپ اور خود ساختہ مثالیں اندراج
 کے لئے ہم پہنچائیں۔

ہر ج کل تحلیلی مخروطات یا ہندسہ مجسمات تحلیلی کی کسی کتاب کو مقطعات
 اور ان کے استعمال کے متعلق معلومات حاصل کئے بغیر پڑھنا اور سمجھنا تقریباً ناممکن
 ہے۔ اس خیال سے ہم نے باب ۳۳ میں مقطعات پر مختصر اور ابتدائی
 بحث کی ہے۔ اور ہمیں امید ہے کہ طالب علم کو مضمون ریاضی کی مکمل اور
 وسیع تعلیم کے لئے تیار کرنے میں یہ مختصر سا ابتدائی بیان کافی اور مفید ثابت ہوگا۔
 آخری باب میں مساواتوں کے نظریہ پر کل مفید مسائل جو پہلے مطالعہ
 کے لئے مفید ہو سکتے ہیں درج کئے گئے ہیں۔ مساواتوں کا نظریہ جبر و مقابلہ کی
 تعلیم کے سلسلے میں اس طرح تدریسی طور پر خود بخود پیدا ہو جاتا ہے کہ ایسے مسائل کو یہاں
 درج کرنے کے لئے جن کو بالعموم علیحدہ کتب درسیہ میں درج کیا جاتا ہے ہمیں کسی معذرت
 کی ضرورت نہیں دراصل انتیسویں باب کا بہت سا حصہ اس منزل سے بہت
 پہلے پڑھ لینا فائدہ سے خالی نہیں۔ اور ابواب ماقبل کے مشکل دفات سے قبل اس
 کا مطالعہ نہایت سہولت بخش ثابت ہوگا۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ہر باب کو بذاتِ خود اتنا مکمل بنائے کی کوشش کی گئی ہے
 جتنا کہ ممکن ہے اس لئے ان کے مطالعہ کی ترتیب کو استاد کی رائے اور مصلحت
 کے لحاظ سے بدلا جاسکتا ہے یا اس ہمہ اس کی سفارش کی جاتی ہے کہ جملہ دفات
 جن پر یہ نشان * دیا گیا ہے پہلی قرائت میں ترک کی جاسکتی ہیں۔
 کتاب ہذا کی ترتیب میں جن اصحاب اور کتب سے ہم نے مدد حاصل کی ہے

اُن کے ضمن میں ایک کتاب ایسی اہم ہے جس کے متعلق یہ کہنا دشوار ہے کہ ہم اس کے کس حد تک زیر احسان ہیں۔ ٹاڈھنٹر کا الجبر فار مسکولز اینڈ کالجس ایک عرصہ سے کتب درسیہ میں نہایت مشہور اور مسلمہ کتاب مانی جاتی ہے یہاں تک کہ موجودہ زمانہ میں جبر و مقابلہ کی کسی درسی کتاب کی تصنیف کا اس کی اثر پذیری سے مستغنی ہونا ناممکن ہے۔ با این ہمہ اگرچہ ٹاڈھنٹر کا الجبر مسلسل بہارے طلبہ کے استعمال میں رہا ہے تاہم ہم نے اس کی ترتیب و تشکیل سے بہت حد تک فائدہ نہیں اٹھایا۔ بہت سے ابواب میں ہم نے اس امر کو فائدہ بخش تصور کیا ہے کہ متبادل ثبوت مندرج کئے جائیں۔ نیز ہم نے متن کی عبارت کی تکمیل کے لئے بہت سے نوٹوں کا اضافہ بھی کیا ہے۔ یہ نوٹ جو موجودہ کتاب میں متفرق مقامات پر پائے جاتے ہیں گزشتہ بیس سال کے عرصہ میں مختلف اوقات پر فراہم کئے گئے ہیں۔ اس لئے یہ امر مشکل ہو گیا ہے کہ جن صورتوں میں دیگر مصنفین سے مدد حاصل کی گئی ہے اُن کا شکریہ ادا کیا جائے۔ ہیئت مجموعی ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہم شلوچ، سیلرٹ اور لورنٹ کے رہن سنت ہیں۔ انگریزی مصنفین میں ٹاڈھنٹر کے الجبر کے علاوہ ہم نے اکثر ڈی مارگن، کوئینسرو، گرویس اور کوسٹل کی تصنیفات سے مدد حاصل کی ہے۔

ریٹیرنڈ والسن ہولم، ڈی۔ ایس سی پروفیسر ریاضی رائل انڈین انجینئرنگ کالج کی اس غایت کے ہم خاص طور پر ممنون احسان ہیں کہ انہوں نے ازراہ کرم اپنی فراہم کردہ اشعار کی فہرست میں سے ہمیں سوالات منتخب کرنے کی اجازت عطا فرمائی۔ اور اس سے ہمارے آخری ابواب کو جو فائدہ پہنچا ہم اس کا اظہار شکریہ کے بغیر نہیں کر سکتے۔

اب ہم دیگر احباب و اصحاب کا شکریہ ادا کرتے ہیں جنہوں نے پروف کے مطالعہ اور تصحیح میں ہمیں بے حد مدد دی ہے۔ بالخصوص ہم ریوسنڈ ایچ سی واٹسن کلفٹن کالج کے مشکور ہیں کہ انہوں نے ازراہ کرم تمام کتاب کی نظر ثانی

Todhunter's Algebra for Schools & Colleges ۱

Schlômlich ۲

Serret ۳

Chrystal ۴ Gross ۵ Colenso ۶ DeMorgan ۷ Laurent ۸

Rev. J. Wolstenholme ۹

فرمائی اور اس کے ہر حصہ میں بہت سی قابلِ قدر تجویزات پیش کیں۔

ایچ۔ ایس۔ ہال

مئی ۱۸۸۷ء

ایس۔ آر۔ ٹائٹ

اشاعت سوم کا دیباچہ

اس اشاعت میں متن اور مثالیں فی اکلاہ ہی ہیں جو اشاعت ماقبل میں تھیں لیکن چند دفعات بدل دی گئی ہیں اور سب مثالوں کی از سر نو تصدیق کی گئی ہے ہم نے اس میں تین سو مثالوں کے ایک مجموعہ کا اضافہ بھی کیا ہے جو ترقی یافتہ اور اعلیٰ مدارج کے طلباء کے لئے مفید ثابت ہوگا۔ یہ مثالیں کلیتہً نہیں لیکن زیادہ تر وظائف کے اور سینٹ ہاؤس کے پرچوں سے حاصل کی گئی ہیں۔ مضمون کے ہر حصہ کی توضیح پر خاص توجہ دی گئی ہے اور مشہور یونیورسٹیوں اور سول سروس کے امتحانات میں سے بھی مناسب مواد فراہم کیا گیا ہے۔

پانچ ۱۸۸۹ء

فہرست مضامین

جبر مقابلہ (حصہ دوم)

نمبر	مضمون
	اٹھارہواں باب
	سود اور سالیانہ
۱	کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر بحساب سود مفرد
۲	کسی رقم مفروضہ کی بستی اور قیمت حاضرہ بحساب سود مفرد
۳	کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر بحساب سود مرکب
۴	ظاہری اور اصلی سالانہ شرح کا سود
۵	کسی رقم مفروضہ کی قیمت حاضرہ اور بستی بحساب سود مرکب
۶	اشلہ نمبری ۱۸ (۱)
۷	سالیانہ - تعریفات
۸	ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اس کا کل زر بحساب سود مفرد
۹	ایک سالیانہ ادا نہیں کیا گیا اس کا کل زر بحساب سود مرکب
۱۰	ایک سالیانہ کی قیمت حاضرہ بحساب سود مرکب
۱۱	ایک ملتوی سالیانہ کی قیمت حاضرہ بحساب سود مرکب
۱۲	

کتنے سالوں کی خبریں
تجدید اجارہ کا جرمانہ
امثلہ نمبری ۱۸ (ب)

انیسواں باب

لاساویات

ابتدائی مسئلے

۱۳ دو مثبت مقداروں کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے
۱۴ دو مقداروں کا حاصل جمع معلوم ہو تو ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا
۱۵ اگر یہ مقادیر مساوی ہوں: نیز اگر حاصل ضرب معلوم ہو تو ان کا مجموعہ
۱۶ چھوٹے سے چھوٹا ہوگا اگر یہ مقادیر برابر ہوں۔
۱۷ مثبت مقادیر کی کسی تعداد کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے
۱۸ 'ا' ب' ج' ... کا حاصل جمع معلوم ہے! 'ا' ب' ج' کی بڑی سے بڑی
۱۹ قیمت دریافت کرو۔

۲۰ اعظم اور اقل قیمتوں کی آسان صورتیں
۲۱ امثلہ نمبری ۱۹ (ا)

۲۲ ان مثبت مقادیر کی م میں توتوں کا اوسط حسابی ہمیشہ ان مقداروں کے
۲۳ اوسط حسابی کی م میں توت سے بڑا ہوتا ہے باستثنائے اُس صورت کے
۲۴ جبکہ م صفر اور ایک کے درمیان واقع ہو۔

۲۵ اگر 'ا' اور 'ب' مثبت صحیح عدد ہیں اور $a < b$ تو

$$(1 + \frac{a}{b}) > (1 + \frac{b}{a})$$

$$\text{اگر } a < b < c \text{ تو } \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} < \sqrt{\frac{b+1}{b-1}}$$

$$\text{ا ب ب} < \left(\frac{\text{ا} + \text{ب}}{2} \right) + \text{ب}$$

امثلہ نمبری ۱۹ (ب)

بیسواں باب

انتہائی قیمتیں اور کسور منعدم

انتہا کی تعریف

سلسلہ $\text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \dots$ کی انتہا ا ہے جبکہ ا صفر ہوتا ہے۔

سلسلہ $\text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \dots$ میں ا کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ہم کسی رقم کو ا کے بعد کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں اور ا کو کافی بڑا لینے سے ہم کسی رقم کو اسکے پہلے کی رقوم کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

کسور منعدم کی انتہا دریافت کرنے کا طریقہ

چند ایسی خصوصیات پر بحث جو ہمزاد مساوات کے حل میں پیش آتی ہیں۔
و خصوصیات جو مساوات درجہ دوم کے حل میں پیش آتی ہیں۔

امثلہ نمبری ۲۰۔

اکیسواں باب

سلسلوں کا استدقاق اور اتساع

وہ صورت جب کسی سلسلہ کی متبادل رقوم مثبت اور منفی ہوں

سلسلہ مستحق ہوگا اگر نہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} > ۱$

سلسلہ ا عن کا مقابلہ مساوی سلسلہ ب عن کے ساتھ

$$\text{مساوی سلسلہ } \frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ا}}{\text{ب}^3} + \dots$$

۶۱	سلسلہ شنائی، قوت نما اور لوکارتی میں اس کا استفادہ
۶۲	لوک ن اور ن لان کی انتہا جبکہ ن، لامتناہی ہو
۶۳	اجزائے ضربی کی کسی لامتناہی تعداد کا حاصل ضرب
۶۶	مثلاً نمبری ۲۱ (ا)
	و سلسلہ مستقیم ہو تو ع سلسلہ بھی مستقیم ہوگا
۶۹	اگر $\frac{ع}{۱-ع} > \frac{ون}{۱-ون}$
۷۱	سلسلہ مستقیم ہوگا اگر ہذا $\{ن(۱ - \frac{ع}{۱+ع})\} < ۱$
۷۳	سلسلہ مستقیم ہوگا اگر ہذا $\{ن(لوک - \frac{ع}{۱+ع})\} < ۱$
۷۵	سلسلہ مستقیم ہے (ن) کا مقابلہ سلسلہ ہے (ن) کے ساتھ
۷۷	معاون سلسلہ ہے $\frac{۱}{ن(لوک ن)}$
۷۷	سلسلہ مستقیم ہوتا ہے اگر ہذا $\{ن(۱ - (۱ - \frac{ع}{۱+ع}))\} < ۱$
۷۹	دو متناہی سلسلوں کا حاصل ضرب
۸۲	مثلاً نمبری ۲۱ (ب)
۸۵	بانیسوال باب
"	نامعلوم سر
۸۷	اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی ن سے زیادہ اصلیں ہوں گی تو یہ مساوات متماثلہ بچگی

۸۰	سلسلہ متناہیہ کے لئے نامعلوم سرور کے اصول کا ثبوت
۹۱	امثلہ نمبری ۲۲ (ا)
۹۳	لا متناہی سلسلہ کے لئے نامعلوم سرور کے اصول کا ثبوت
۹۷	امثلہ نمبری ۲۲ (ب)
۱۰۰	تیسویں باب
۱۰۱	جزوی کسور
۱۰۶	جزوی کسور میں تحلیل
۱۰۷	تفصیل یا پھیلاؤ میں جزوی کسور کا استعمال
۱۰۸	امثلہ نمبری ۲۳
۱۱۱	چوبیسواں باب
۱۱۲	متوالی سلسلے
۱۱۳	رابطہ کا پیمانہ
۱۱۴	متوالی سلسلہ کا حاصل جمع
۱۱۵	تکوینی تفاعل
۱۱۹	امثلہ نمبری ۲۴
۱۲۲	پچیسواں باب
۱۲۳	کسور مسلسل
۱۲۴	ایک کسور کو مسلسل کسور کی شکل میں لانا
	مستحق مسلسل کسور کی اصلی قیمت سے متبادلاً کم اور زیادہ ہوتے ہیں

۱۲۵	متواتر مستدقوں کے بنانے کا کلیہ
۱۲۸	ق _۱ ل _۱ - ق _{۱۰} ل _{۱۰} = (۱-۱۰) ^۵
۱۲۹	اسٹل نمبری ۲۵ (ا)
	ہر مستدق اپنے پہلے کے مستدق کی نسبت مسلسل کسر کی قیمت کے
۱۳۱	مقابلہ زیادہ قریب ہوتا ہے۔
۱۳۲	کسی مستدق کو مسلسل کسر کے مساوی لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اُس کی حدود
۱۳۵	ہر مستدق کسی ایسی کسر کی نسبت جس کا نسب نامہ کم ہو مسلسل کسر کی قیمت کے
	زیادہ قریب ہوتا ہے۔
۱۳۷	ق _۱ ق _۱ / ل _۱ ل _۱ < یا > لا اگر بالترتیب ق _۱ / ل _۱ < یا > ق _۱ / ل _۱
	اسٹل نمبری ۲۵ (ب)
۱۳۲	پچھیسواں باب
"	درجہ اول کی غیر معین مساواتیں
۱۳۳	مساوات اول - ب ما = ج کا حل
۱۳۵	اگر مساوات کا ایک حل دیا گیا ہو تو عام حل معلوم کرو
"	مساوات اول + ب ما = ج کا حل
۱۳۷	اگر مساوات کا ایک حل دیا گیا ہو تو عام حل معلوم کرو
"	مساوات اول + ب ما = ج کے حلوں کی تعداد

۱۵۰

لا + ب ما + جی = ر
لا + ب ما + جی = ر

۱۵۲

اشتراک نمبری ۲۶

ستائیسواں باب

متوالی مسلسل کسور

۱۵۵

عدد مثال

۱۵۷

ایک دوری کسر مسلسل کی قیمت درجہ دوم کی ایک مقدار اسم کے مساوی ہوتی ہے

۱۵۸

اشتراک نمبری ۲۷ (ا)

۱۶۰

درجہ دوم کی ایک مقدار اسم کی مسلسل کسر کی شکل میں تحویل

۱۶۲

خارج قسمت متوالی ہوتے ہیں۔

۱۶۳

دور جزوی خارج قسمت ۲ پر ختم ہوتا ہے

۱۶۴

اول اور آخر سے مساوی افضل جزوی خارج قسمت باہم مساوی ہوتے ہیں

۱۶۷

دوروں کے اقبل والا ختم مستحق

۱۶۰

اشتراک نمبری ۲۷ (ب)

۱۶۲

اٹھائیسواں باب

"

درجہ دوم کی غیر معین مساواتیں

"

لا + ۵۲ لا ما + ب ما + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ کا حل

۱۶۴

مساوات لا - ث ما = ا کو ہمیشہ حل کیا جاسکتا ہے

۱۶۸

مساوات لا - ث ما = ۱ کا حل

۱۶۹

مساوات لا - ث ما = ا کا عام حل

۱۸۳

مساوات لا - ث ما = لا کا حل

۱۸۴	وانٹین کے سوالات
۱۸۶	امثلہ نمبری ۲۸
۱۸۹	انتیسواں باب
۱۹۰	سلسلوں کا جمع کرنا
۱۹۲	گزشتہ قاعدوں کا خلاصہ
۱۹۵	سلسلہ حسابیہ میں n اجزائے ضربی کا حاصل ضرب n ہے
۱۹۹	سلسلہ حسابیہ میں n اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کا متکافی n ہے
۲۰۰	تفریق کا طریقہ
۲۰۱	جلد n اجزائے ضربی کا حاصل جمع
۲۰۳	سمتیر ضلعی اور اشکالی اعداد
۲۰۶	پاسکل (Pascal) کا مثلث
۲۰۸	امثلہ نمبری ۲۹ (ا)
۲۱۳	فروں کا طریقہ
۲۱۵	یہ عمل اس صورت میں کام آسکتا ہے جبکہ n کا کوئی ناظق صحیح تفاعل ہو
۲۱۸	اگر n کا ناظق صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ $1, 2, 3, \dots, n$ ایک متوالی سلسلہ ہوگا۔
۲۲۵	متوالی سلسلے کی دیگر صورتیں
۲۲۶	امثلہ نمبری ۲۹ (ب)
۲۳۱	جمع کے عام قاعدے
۲۳۴	سلسلہ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کا حاصل جمع
۲۳۴	برنولی (Bernoulli) کے اعداد
۲۳۴	امثلہ نمبری ۲۹ (ج)

تیسواں باب

عدووں کا نظریہ

اعلیٰ درجوں کا بیان

مغزوہ عدووں کی تعداد لاتعداد ہی ہے

کوئی ناطق جبر یہ ضابطہ ایسا نہیں ہے جو محض مفرد عددوں کو تعبیر کرے۔

کوئی عدد اپنے مفرد اجزائے ضربی میں صرف ایک طریقہ سے تحلیل کیا جاسکتا ہے

کسی مفروضہ حدود صحیح کے تقسوم علیہ کی تعداد

کوئی عدد صحیح جن طریقوں سے دو اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے اُن کی تعداد

کسی مفروضہ عدد صحیح کے مقسوم علیہ کا حاصل قیسم

کسی مفرد عدد کی بڑی سے بڑی قوت جو n میں شامل ہے۔

متصل و صحیح اعداد کا حاصل ضرب لے کر پھر تقسیم ہوتا ہے

(فرما) (Fermat) کا مسئلہ)۔ اگر n مفرد ہو اور $x^n + y^n = z^n$ مفرد ہو، تو n کا $n-1$ کا مضرب نہیں ہو سکتا۔

تو عم ف ۱ - ۱ = ضعف (ف)

اشکال نمبری ۳۰ (۱)

مستطابق کی تعریف

اگر ان لحاظات کے مفروضہ ہو کہ ۱، ۲، ۳ اور (ب-۱) ایک کو ب پر تقسیم

کرنے سے مختلف اقبال حاصل ہوتی ہیں

فہ (ا ب ح د) = فہ (ا) \times فہ (ب) \times فہ (ج) \times فہ (د) ...

فهر (ع) = $(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}) / (\frac{1}{12} - \frac{1}{24}) / (\frac{1}{24} - \frac{1}{48}) / (\frac{1}{48} - \frac{1}{96}) / (\frac{1}{96} - \frac{1}{192}) / (\frac{1}{192} - \frac{1}{384}) / (\frac{1}{384} - \frac{1}{768}) / (\frac{1}{768} - \frac{1}{1536}) / (\frac{1}{1536} - \frac{1}{3072}) / (\frac{1}{3072} - \frac{1}{6144}) / (\frac{1}{6144} - \frac{1}{12288}) / (\frac{1}{12288} - \frac{1}{24576}) / (\frac{1}{24576} - \frac{1}{49152}) / (\frac{1}{49152} - \frac{1}{98304}) / (\frac{1}{98304} - \frac{1}{196608}) / (\frac{1}{196608} - \frac{1}{393216}) / (\frac{1}{393216} - \frac{1}{786432}) / (\frac{1}{786432} - \frac{1}{1572864}) / (\frac{1}{1572864} - \frac{1}{3145728}) / (\frac{1}{3145728} - \frac{1}{6291456}) / (\frac{1}{6291456} - \frac{1}{12582912}) / (\frac{1}{12582912} - \frac{1}{25165824}) / (\frac{1}{25165824} - \frac{1}{50331648}) / (\frac{1}{50331648} - \frac{1}{100663296}) / (\frac{1}{100663296} - \frac{1}{201326592}) / (\frac{1}{201326592} - \frac{1}{402653184}) / (\frac{1}{402653184} - \frac{1}{805306368}) / (\frac{1}{805306368} - \frac{1}{1610612736}) / (\frac{1}{1610612736} - \frac{1}{3221225472}) / (\frac{1}{3221225472} - \frac{1}{6442450944}) / (\frac{1}{6442450944} - \frac{1}{12884901888}) / (\frac{1}{12884901888} - \frac{1}{25769803776}) / (\frac{1}{25769803776} - \frac{1}{51539607552}) / (\frac{1}{51539607552} - \frac{1}{103079215104}) / (\frac{1}{103079215104} - \frac{1}{206158430208}) / (\frac{1}{206158430208} - \frac{1}{412316860416}) / (\frac{1}{412316860416} - \frac{1}{824633720832}) / (\frac{1}{824633720832} - \frac{1}{1649267441664}) / (\frac{1}{1649267441664} - \frac{1}{3298534883328}) / (\frac{1}{3298534883328} - \frac{1}{6597069766656}) / (\frac{1}{6597069766656} - \frac{1}{13194139533312}) / (\frac{1}{13194139533312} - \frac{1}{26388279066624}) / (\frac{1}{26388279066624} - \frac{1}{52776558133248}) / (\frac{1}{52776558133248} - \frac{1}{105553116266496}) / (\frac{1}{105553116266496} - \frac{1}{211106232532992}) / (\frac{1}{211106232532992} - \frac{1}{422212465065984}) / (\frac{1}{422212465065984} - \frac{1}{844424930131968}) / (\frac{1}{844424930131968} - \frac{1}{1688849860263936}) / (\frac{1}{1688849860263936} - \frac{1}{3377699720527872}) / (\frac{1}{3377699720527872} - \frac{1}{6755399441055744}) / (\frac{1}{6755399441055744} - \frac{1}{13510798882111488}) / (\frac{1}{13510798882111488} - \frac{1}{27021597764222976}) / (\frac{1}{27021597764222976} - \frac{1}{54043195528445952}) / (\frac{1}{54043195528445952} - \frac{1}{108086391056891904}) / (\frac{1}{108086391056891904} - \frac{1}{216172782113783808}) / (\frac{1}{216172782113783808} - \frac{1}{432345564227567616}) / (\frac{1}{432345564227567616} - \frac{1}{864691128455135232}) / (\frac{1}{864691128455135232} - \frac{1}{1729382256910270464}) / (\frac{1}{1729382256910270464} - \frac{1}{3458764513820540928}) / (\frac{1}{3458764513820540928} - \frac{1}{6917529027641081856}) / (\frac{1}{6917529027641081856} - \frac{1}{13835058055282163712}) / (\frac{1}{13835058055282163712} - \frac{1}{27670116110564327424}) / (\frac{1}{27670116110564327424} - \frac{1}{55340232221128654848}) / (\frac{1}{55340232221128654848} - \frac{1}{110680464442257309696}) / (\frac{1}{110680464442257309696} - \frac{1}{221360928884514619392}) / (\frac{1}{221360928884514619392} - \frac{1}{442721857769029238784}) / (\frac{1}{442721857769029238784} - \frac{1}{885443715538058477568}) / (\frac{1}{885443715538058477568} - \frac{1}{1770887431076116955136}) / (\frac{1}{1770887431076116955136} - \frac{1}{3541774862152233910272}) / (\frac{1}{3541774862152233910272} - \frac{1}{7083549724304467820544}) / (\frac{1}{7083549724304467820544} - \frac{1}{14167099448608935641088}) / (\frac{1}{14167099448608935641088} - \frac{1}{28334198897217871282176}) / (\frac{1}{28334198897217871282176} - \frac{1}{56668397794435742564352}) / (\frac{1}{56668397794435742564352} - \frac{1}{113336795588871485128704}) / (\frac{1}{113336795588871485128704} - \frac{1}{226673591177742970257408}) / (\frac{1}{226673591177742970257408} - \frac{1}{453347182355485940514816}) / (\frac{1}{453347182355485940514816} - \frac{1}{906694364710971881029632}) / (\frac{1}{906694364710971881029632} - \frac{1}{1813388729421943762059264}) / (\frac{1}{1813388729421943762059264} - \frac{1}{3626777458843887524118528}) / (\frac{1}{3626777458843887524118528} - \frac{1}{7253554917687775048237056}) / (\frac{1}{7253554917687775048237056} - \frac{1}{14507109835375550096474112}) / (\frac{1}{14507109835375550096474112} - \frac{1}{29014219670751100192948224}) / (\frac{1}{29014219670751100192948224} - \frac{1}{58028439341502200385896448}) / (\frac{1}{58028439341502200385896448} - \frac{1}{116056878683004400771792896}) / (\frac{1}{116056878683004400771792896} - \frac{1}{232113757366008801543585792}) / (\frac{1}{232113757366008801543585792} - \frac{1}{464227514732017603087171584}) / (\frac{1}{464227514732017603087171584} - \frac{1}{928455029464035206174343168}) / (\frac{1}{928455029464035206174343168} - \frac{1}{1856910058928070412348686336}) / (\frac{1}{1856910058928070412348686336} - \frac{1}{3713820117856140824697372672}) / (\frac{1}{3713820117856140824697372672} - \frac{1}{7427640235712281649394745344}) / (\frac{1}{7427640235712281649394745344} - \frac{1}{14855280471424563298789490688}) / (\frac{1}{14855280471424563298789490688} - \frac{1}{29710560942849126597578981376}) / (\frac{1}{29710560$

[illegible]

اعداد مفرد کی ایک مخصوص خاصیت

ولسین کا مسئلہ: (دوسرا ثبوت)

۲۴۰

4

4

۲۴۴

4

۴۴۴

11

194

774

FFA

4

५०१

For

124

4

209

74.

22

२५ अ

4

۲۶۶	استقرار سے ثبوت
۲۶۸	امثلہ نمبری ۳۰ (ب)
۲۶۲	اکتیسواں باب
"	مسلل کسور کا عام نظریہ
۲۶۳	متواتر مستقوں کے بنانے کا کلیہ
۲۶۶	$\frac{ب}{ب+۱} - \frac{ب}{ب+۲} \dots$ کی ایک معین قیمت ہوگی اگر نہا $\frac{۱+۱}{۱+۵} < \frac{ب}{ب+۱}$
۲۶۸	$\frac{ب}{ب+۱} - \frac{ب}{ب+۲} \dots$ کے مستق مثبت واجب کسر میں ہوگی جو لمحات مقدار کے
۲۶۸	صعودی ترتیب میں ہوگی بشرطیکہ $۱ < ۱ + ب$
۲۸۱	مستق کی عام قیمت جبکہ ۱ اور $ب$ مستقل ہوں
۲۸۲	وہ صورتیں جہاں مستق کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے
۲۸۳	$\frac{ب}{ب+۱} - \frac{ب}{ب+۲} \dots$ متباہن ہوگی، اگر $\frac{ب}{ب+۱} > ۱$
۲۸۶	امثلہ نمبری ۳۱ (۱)
۲۸۹	سلسلہ کو کسر مسلسل کی شکل میں لانا
۲۹۲	ایک مسلسل کسر کی تحویل دوسری میں
۲۹۳	امثلہ نمبری ۳۱ (ب)
۲۹۵	تیسواں باب
"	احتمال
"	تحریرات اور مثالیں۔ مفروضات

۳۰۰	اشکال نمبری ۳۲ (ا)
۳۰۲	مربک واقعات
۳۰۴	اگر دو غیر تابع واقعات میں سے ہر ایک کا احتمال معلوم ہو تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال قی ق ہے۔
۳۰۶	یہ ضابطہ تابع واقعات کے لئے بھی کارآمد ہے
۳۰۷	ایک واقعہ کا احتمال جو کسی دوسرے کے منافی طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے
۳۱۲	اشکال نمبری ۳۲ (ب)
۳۱۵	ن امتحانوں میں کسی واقعہ کے عین ر مرتبہ وقوع پذیر ہونے کا احتمال -
۳۱۸	توقع اور ظنی قیمت
۳۲۱	بازیوں کا مسئلہ
۳۲۳	اشکال نمبری ۳۲ (ج)
۳۲۶	مقلوب احتمال
۳۲۸	برنالی کے مسئلہ کی شہادت
۳۲۹	ضابطہ فر = $\frac{ق ق}{ق ق}$ کا ثبوت
۳۳۲	ہمعصر شہادت
۳۳۴	منقولی شہادت
۳۳۸	اشکال نمبری ۳۲ (د)
۳۴۲	مقامی احتمال - ہندی طریقے
۳۴۵	متفرق مثالیں
۳۵۰	اشکال نمبری ۳۲ (ر)
۳۵۶	تینتیسواں باب
"	مقطعات

۳۵۷	دو متساوی خطی مساواتوں کا حاصل باسقاط
۳۵۹	تین متساوی خطی مساواتوں کا حاصل باسقاط
۳۶۰	مقطع میں کوئی جدیدی نہیں ہوتی جبکہ قطاروں اور ستونوں کو باہم بدل دیا جائے
۳۶۱	تیسرے مرتبہ کے مقطع کا پھیلاؤ
۳۶۲	دو متصل ستونوں کو یا متصل قطاروں کو باہم بدل دیا جائے تو مقطع کی علامت بدل جاتی ہے۔
۳۶۳	اگر ایک مقطع کے دو ستون یا دو قطاریں متماثل ہوں تو مقطع صفر ہو جاتا ہے
۳۶۴	ہر کس قطار یا ستون کو ایک ہی جزو ضربی سے ضرب دیا جائے تو مقطع مذکور اُس جزو ضربی سے ضرب کیا جاتا ہے۔
۳۶۵	دو علامتیں جہاں جزو افزائی مختلف رقوم پر مشتمل ہوتے ہیں
۳۶۶	قطاروں اور ستونوں کے اختصار کے قلعے کی تحویل
۳۶۷	دو قلعے کے حاصل ضرب
۳۶۸	مثلاً نمبر ۳۲ (۱)
۳۶۹	ہمزاد مساواتوں کے حل کا طریقہ
۳۷۰	چوتھے مرتبہ کا مقطع
۳۷۱	کسی مرتبہ کا مقطع
۳۷۲	علامت \pm اور \mp جے جے
۳۷۳	مثلاً نمبر ۳۳ (ب)
۳۷۴	چوتھوں باب
۳۷۵	متفرق مسائل و امثلہ
۳۷۶	جبر و مقابلہ کے ایسی کلیات کی نظر ثانی
۳۷۷	ع (لا) کو لا۔ (ا) پر تقسیم کیا جائے تو باقی ف (ا) بیگی
۳۷۸	ف (لا) کا مانع قسمت جب لا۔ (ا) سے تقسیم کیا جائے

۳۹۵	منفردہ سروں کے استعمال کا طریقہ
۳۹۶	ہارنس کا ترکیبی تقسیم کا طریقہ
۳۹۹	متشاکل اور متبادل تفاہیل
۴۰۱	متاثرات کی حل شدہ مثالیں
۴۰۱	منفی ضابطوں کی فہرست
۴۰۲	امثلہ نمبری ۳۴ (ا)
۴۰۹	متاثرات جو ا کے جذر الکعبوں کے خاص سے ثابت کی گئی ہیں۔
۴۰۸	اگر $۳ + ۲ + ج - ۳ = ۱ ب ج$ کے خطی اجزائے ضربی
۴۱۰	اگر $۱ + ب + ج = ۰$ ہو تو $۱ + ب + ج$ کی قیمت
۴۱۱	امثلہ نمبری ۳۴ (ب)
۴۱۲	اسقاط
۴۱۳	متشاکل تفاہیل کے ذریعہ اسقاط
۴۱۴	آئیلر (Euler) کا طریقہ اسقاط
۴۱۵	سل و سلٹ کا انفرادی طریقہ اسقاط
۴۱۶	بیزاؤٹ (Bezout) کا طریقہ
۴۱۷	اسقاط کی متفرق مثالیں
۴۱۸	امثلہ نمبری ۳۴ (ج)
۴۲۰	بیئتیسوال باب
۴۲۱	نظریہ معادلات
۴۲۲	ن دیں درجہ کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہوتی ہیں اس سے زیادہ نہیں ہو سکتیں۔
۴۲۳	اصلوں اور سروں کے باہمی روابط
۴۲۴	یہ روابط حل کے لئے کافی نہیں ہیں۔

۴۲۵	منرو ضہ شرائط کے ماتحت حل کی صورتیں
۴۲۶	اصولوں کے متشاکل تفاضلوں کی آسان صورتیں
۴۲۷	امثلہ نمبری ۳۵ (ا)
۴۲۸	خیالی اور اصم اصولوں کے زوج واقع ہوتے ہیں
۴۲۹	اصم اصولوں کی مساواتوں کا حل اور بناوٹ
۴۳۰	ڈی کارٹیز (Descartes) کی علامتوں کا قانون
۴۳۱	امثلہ نمبری ۳۵ (ب)
۴۳۲	فا (لا+ہ) کی قیمت - مشتق تفاضیل
۴۳۳	ہارنر کے طریقہ سے فا (لا+ہ) کی تخمین
۴۳۴	فا (لا) اپنی قیمت بتا رہا ہے
۴۳۵	اگر فا (لا) اور فا (ب) مختلف علامات ہوں تو فا (لا) = ۰ کی ایک اصل
۴۳۶	ا اور ب کے درمیان واقع ہوگی
۴۳۷	طاق درجہ کی ایک مساوات کی ایک اصل حقیقی ہوتی ہے
۴۳۸	اگر ایک مساوات کا درجہ نسبت ہو اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس کی دو اصلیں حقیقی ہونگی
۴۳۹	اگر فا (لا) = ۰ کی راصلیں (کے مساوی ہوں تو)
۴۴۰	فا (لا) = ۰ کی راصلیں (کے مساوی ہونگی)
۴۴۱	مساوی اصولوں کی تخمین
۴۴۲	فا (لا) = $\frac{1}{لا-ا} + \frac{1}{لا-ب} + \frac{1}{لا-ج} + \dots$
۴۴۳	اصولوں کی کسی خاص قوت کا حاصل جمع
۴۴۴	امثلہ نمبری ۳۵ (ج)
۴۴۵	مساواتوں کا احتمال
۴۴۶	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = ۰ کی اصولوں کے مساوی اور مختلف علامات ہوں -

۴۵۱	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = کی اصلوں کے اضغاف کے مساوی ہوں
۴۵۲	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = کی اصلوں کے مشکافیوں کے مساوی ہوں
۴۵۳	مشکافی مساواتوں پر بحث
۴۵۴	مساوات جس کی اصلیں مساوات فا (لا) = کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں -
۴۵۵	مساوات جس کی اصلیں مساوات فا (لا) = کی اصلوں سے بقدر مقدار کے بڑی ہوں -
۴۵۶	کسی خاص رقم کا مجموعہ کرنا
۴۵۷	مساوات جس کی اصلیں فا (لا) = کی اصلوں کے مفروضہ تفاعیل کے مساوی ہوں -
۴۵۸	اشلہ نمبری ۳۵ (۵)
۴۶۱	کبھی مساواتیں
۴۶۳	کارڈن کا حل
۴۶۴	اس حل پر بحث
۴۶۵	اس ناقابل تحویل صورت میں حل کی تکمیل بذریعہ علم مثلث
۴۶۶	مساوات درجہ چہارم - فیاری (Ferrari) کا حل
۴۶۸	ڈی کارٹین (Descartes) کا حل
۴۶۹	نا معلوم
۴۷۰	میزر کبھی؟ تمام اصلیں حقیقی
۴۷۱	تین ہمزاد مساواتوں کا حل $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 1$ وغیرہ
۴۷۲	اشلہ نمبری ۳۵ (۶)
۴۷۳	مفروق متالیں
۴۷۴	جوابات

بسم اللہ الرحمن الرحیم

جستار و بلب

اٹھارواں باب سود اور سالیانہ

۲۲۹۔ اس باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ کس طرح سود اور مٹی کے سوالات جبریہ ضوابط کو استعمال کرنے سے آسانی سے حل ہو جاتے ہیں۔

ہم الفاظ 'سود'، 'مٹی' اور قیمت حاضرہ کو انہی معنوں میں استعمال کریں گے جن میں یہ اصطلاحیں علم حساب کی عام کتابوں میں استعمال ہوتی ہیں، لیکن سود کی شرح کو اس طرح بیان کرنے کی بجائے کہ ۱۰۰ پونڈ پر فی سال اس قدر سود ہے یہ زیادہ آسان ہو گا کہ اس کو یوں بیان کیا جائے کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود اس قدر ہے۔

۲۳۰۔ کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت کے لئے بحساب سود مفروضہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصل زر دس ہے، پونڈ ہے، ایک پونڈ کا سود ایک سال میں شش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن، سود س اور کل زر ک ہے۔ چونکہ ص کا ایک سال کا سود ص شش ہے، اس لئے اس کا

ن سال کا سود ص ن ش ہے،
پس $س = ص ن ش$ (۱)
نیز $ک = ص + س$
اس لئے $ک = ص (۱ + ن ش)$ (۲)
(۱) اور (۲) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر ہم ص، ن، ش، س
میں سے یا ص، ن، ش، ک میں سے کوئی تین مقادیر معلوم ہوں
تو چوتھی مقدار معلوم ہو سکتی ہے۔
اس ۱۔ کسی رقم مفروضہ کی تہی اور قیمت حاضرہ کسی دی ہوئی مدت
کے لئے بحساب سود مفروضہ معلوم کر دو۔
فرض کر دو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح، نیز تہی م ہے،
ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔
چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے جس کو سود بہ نرخ دینے سے ن سالوں میں
اس کا کل زر ص ہو جاتا ہے اس لئے
 $ص = ح (۱ + ن ش)$

$$\therefore ح = \frac{ص}{۱ + ن ش}$$

$$\text{اور } م = ص - ح = ص - \frac{ص}{۱ + ن ش}$$

$$\therefore م = \frac{ص ن ش}{۱ + ن ش}$$

نوٹ۔ م کی جو قیمت مساوات بالا سے حاصل ہوتی ہے، اس کو
داصلی تہی کہتے ہیں۔ لیکن عملی طور پر جب کوئی رقم واجب الادا ہوئی
معیہ تاریخ سے قبل ادا کی جاتی ہے تو ساہوکار قرضہ میں سے اصلی
تہی وضع کرنے کی بجائے قرضہ پر کا سود وضع کر لیتے ہیں، جو رقم اس طرح
سے وضع کی جاتی ہے اس کو ”ساہوکاری تہی“ کہتے ہیں، پس

ساہوکاری متی = ص ن ش

اصلی متی = $\frac{\text{ص ن ش}}{1 + \text{ص ن ش}}$

مثال - ۱۹۰۰ پونڈ کے لئے اصلی متی، اور ساہوکاری متی کا فرق ۶ شلنگ ۸ پینس ہوتا ہے جبکہ رقم تاریخ مقررہ سے ۴ ماہ قبل ادا کیجئے۔
شرح فیصد بحساب سود مفرد دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ش ہے، تب

ساہوکاری متی = $\frac{1900 \text{ ش}}{3}$

اور اصلی متی = $\frac{1900 \text{ ش}}{3 + 1 + \frac{1}{3} \text{ ش}}$

$$\frac{1}{3} = \frac{1900 \text{ ش}}{3} - \frac{1900 \text{ ش}}{3 + 1 + \frac{1}{3} \text{ ش}}$$

جس سے ۱۹۰۰ ش = ۳ + ش

$$151 \pm 1 = \frac{22800 \pm 1}{3800} = 151 \pm 1$$

منفی اصل کو نظر انداز کرنے سے ش = $\frac{151}{3800}$

شرح فیصد = ۱۰۰ ش = ۴

۲۳۲ - کسی رقم مفروضہ کا سود اور کل زر کسی دی ہوئی مدت میں بحساب سود مرکب معلوم کرو۔
فرض کرو کہ اصل زر ص ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر

شش ہے، نیز سالوں کی تعداد ن ہے، سود سی ہے اور کل زر ک ہے۔

پہلے سال کے آخر میں ص کا کل زر = ص شش اور چونکہ یہ دوسرے سال کے لئے اصل زر ہے اس لئے دوسرے سال کے آخر میں کل زر ص شش × شش یعنی ص شش ہے، اسی طرح سے تیسرے سال کے آخر میں کل زر = ص شش اور علیٰ ہذا القیاس ن سالوں کے بعد کل زر ص شش ہے۔
پس ک = ص شش

نوٹ۔ اگر ایک پونڈ کے ایک سال کے سود کو ش سے تعبیر کیا جائے تو

ش = ۱ + ش
۳۳۳ = بیوپار میں اگر مدت کے اندر سال کی کوئی کسر شامل ہو تو رواجا کسر مذکور کے لئے سود بحساب سود و نقد محسوب کیا جاتا ہے پس ایک پونڈ کا کل زر ۱/۳ سال میں ۱ + ش ہوگا اور ص کا کل زر بحساب سود مرکب ۲/۳ سال میں ص شش (۱ + ۲/۳ ش) ہوگا، اسی طرح سے ص کا کل زر ن + ۱/۳ سال میں ص شش (۱ + ۱/۳ ش) ہوگا۔

اگر سود سال میں ایک سے زیادہ بار واجب الادا ہو تو ظاہری سالانہ شرح میں اور اس شرح میں جو فی الحقیقت وصول ہوتی ہے اختلاف ہوتا ہے، مؤخر الذکر کو اصلی سالانہ شرح سے موسوم کیا جاسکتا ہے، مثلاً اگر سود سال میں دو بار واجب الادا ہو اور ظاہری سالانہ شرح ش ہو تو ایک سال کا کل زر نصف سال کے بعد

۱ + $\frac{\text{ش}^۱}{۲}$ ہوگا اور اس لئے ایک پونڈ کا کل زر پورے سال میں
 (۱ + $\frac{\text{ش}^۱}{۲}$) یعنی ۱ + $\text{ش}^۱$ + $\frac{\text{ش}^۱}{۲}$ ہوگا پس اصلی سالانہ شرح
 سود $\text{ش}^۱$ + $\frac{\text{ش}^۱}{۲}$ ہوگی۔
 ۳۳ - اگر سود سال میں ق بار واجب الادا ہوا اور ظاہری سال
 شرح $\text{ش}^۱$ ہو تو ظاہر ہے کہ ایک پونڈ کا سود $\frac{۱}{۲}$ سال کے
 ہر وقفہ کے لئے $\frac{\text{ش}^۱}{۲}$ ہوگا اس لئے ص کا کل زر ن
 سال میں یعنی ق ن وقفوں میں ص (۱ + $\frac{\text{ش}^۱}{۲}$) ن ق ہوگا۔
 اس کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ ”ایک سال میں ق مرتبہ سود اصل
 زر میں بدل جاتا ہے“
 اگر سود ہر لمحہ اصل زر میں تبدیل ہوتا رہے تو ق لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے
 اس صورت میں کل زر کی قیمت نکالنے کے لئے فرض کرو کہ $\frac{\text{ش}^۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ ،
 یعنی ق = $\text{ش}^۱$ لا

$$\text{کل زر} = \text{ص} (۱ + \frac{\text{ش}^۱}{۲}) \text{ق} = \text{ص} (۱ + \frac{۱}{۲}) \text{لا} \text{ش}^۱$$

$$= \text{ص} \{ (۱ + \frac{۱}{۲}) \text{لا} \text{ش}^۱ \}$$

$$= \text{ص} \text{ق} \text{ش}^۱ \text{ [دیکھو حصہ اول، صفحہ ۲۵۹] کیونکہ}$$

ق کے لا انتہا بڑھ جانے سے لا بھی لا انتہا بڑھ جاتا ہے۔
 ۳۳۵ - کسی رقم مفروضہ کی قیمت حاضرہ اور مٹی کسی دی ہوئی مدت
 کے لئے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ رقم مفروضہ ص ہے اور قیمت حاضرہ ح ہے،

نیز متنی م ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر رش ہے اور سالوں کی تعداد ن ہے۔ اب چونکہ ح ایک ایسی رقم ہے کہ اگر اس کو سود پر قرض دیا جائے تو ن سالوں میں اس کا کل زر رش ہو جاتا ہے اسلئے

$$ص = ح \times ش^{\text{ن}}$$

$$\therefore ح = \frac{ص}{ش^{\text{ن}}} = ص \times ش^{-\text{ن}}$$

$$\text{اور م} = ص (1 - ش^{-\text{ن}})$$

مثال - ۶۷۲ پونڈ کچھ عرصہ کے بعد واجب الادا ہیں، اس رقم کی قیمت حاضر، ۱۲۶ پونڈ ہے، اگر سود مرکب بشرح $\frac{1}{4}\%$ فی صد محسوب کیا جائے تو مدت معلوم کرو جبکہ

$$\text{لوک } 2 = 63.103, \text{ لوک } 3 = 12.444$$

$$\text{یہاں } ش = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}, \text{ اور } ش^{-\frac{25}{24}} = \frac{25}{24}$$

فرض کرو کہ سالوں کی تعداد ن ہے، تب

$$642 = 126 \left(\frac{25}{24} \right)^{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ن لوک} = \frac{25}{24} = \text{لوک } \frac{642}{126}$$

$$\text{ن لوک} = \frac{100}{92} = \text{لوک } \frac{12}{3}$$

$$\therefore \text{ن} (\text{لوک } 100 - \text{لوک } 92) = \text{لوک } 12 - \text{لوک } 3$$

$$\text{ن} = \frac{\text{لوک } 12 - \text{لوک } 3}{\text{لوک } 100 - \text{لوک } 92}$$

$$ن = \frac{۵۷۷۰۰}{۵۰۱۷۷۳} = ۴۱ \text{ تقریباً}$$

پس مدت تقریباً ۴۱ سال ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸ (۱)

حسب ضرورت ذیل کے لوکار تم استعمال کئے جائیں،

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ ، لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ ، لوک ۱۱ = ۱۵۰۴۱۳۹۲۷

۱۔ ۱۰۰ پونڈ کا کل زرہ ۵۰ سال میں ۵ فیصد شرح سے بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

$$\text{لوک } ۱۱۴۶۷۷۰ = ۲۵۰۵۹۴۶۵۰$$

۲۔ ایک رقم کا سود مفرد ۹۰ پونڈ ہے اور اس کی مٹی اسی شرح پر اسی مدت میں ۸۰ پونڈ ہے، رقم معلوم کرو۔

۳۔ ایک رقم ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کتنے سال میں دگنی ہو جائے گی۔

۴۔ ۱۰ ہزار پونڈ کی رقم ۸ سال کے بعد واجب الادا ہے، اس کی قیمت حاضرہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب دریافت کرو۔

$$\text{لوک } ۶۷۷۸۳۵۹۴ = ۴۵۸۳۰۴۸۵۶$$

۵۔ ایک ہزار پونڈ ۱۰ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کتنے سالوں میں ۲۵۰۰ پونڈ ہو جائیگے۔

۶۔ ثابت کرو کہ بحساب سود مفرد کسی رقم کی مٹی اس رقم اور اس کے سود کے اوسط موسیقی کے نصف کے مساوی ہوتی ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۵ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کوئی رقم ۱۰۰ سال میں سو گنا سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

۸۔ کوئی رقم ۱۲ سال میں ۶ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب

ایک ہزار پونڈ ہو جائے گی۔

$$\text{لوک } 104 = 250253.09$$

$$\text{لوک } 4490 = 252943292$$

۹۔ ایک شخص ایک ساہوکار سے ۶۰۰ پونڈ قرض لیتا ہے اور ہر چھ ماہ کے بعد ۱۸ فیصد کا اضافہ کر کے نیا تمسک تحریر کر دیتا ہے۔ بتاؤ کہ کتنا وقت گزرنے کے بعد تمسک ۶ ہزار پونڈ تک پہنچ جائے گا۔

$$\text{لوک } 118 = 25021882$$

۱۰۔ ایک فاردنگ ۲۰۰ سال میں ۶ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب کیا ہو جائے گا۔ معلوم ہے

$$\text{لوک } 104 = 250253.09$$

$$\text{لوک } 1151240 = 250411800$$

سالیانہ

۲۳۶۔ سالیانہ سے ایک ایسی معینہ رقم مراد ہوتی ہے جو خاص شرائط کے ماتحت مقررہ مساوی وقفوں کے بعد ادا کی جاتی ہے اور یہ ادائیگی ہر سال میں ایک بار یا کئی بار عمل میں آتی ہے۔ جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے ادائیگی مذکور سالانہ سمجھی جائے گی۔

میعادی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو سالوں کی ایک خاص تعداد کے لئے غیر مشروط طور پر واجب الادا ہو۔

حیاتی سالیانہ سے مراد وہ سالیانہ ہے جو ایک شخص کو یا کئی اشخاص کے پس ماندہ کو تازہ لیست واجب الادا ہو۔

ملتوی سالیانہ سے وہ سالیانہ مراد ہے جو سالوں کی کسی خاص تعداد کے گزرنے کے بعد شروع ہو۔ جب یہ کہا جائے کہ سالیانہ ن سالوں کے لئے ملتوی کیا گیا ہے تو اس سے یہ مراد ہوتی ہے کہ سالیانہ ن سالوں کے بعد شروع ہوگا اور پہلی قسط (ن + ۱) ویں سال کے

آخر میں ادا کی جائے گی۔
اگر سالیانہ ایسا ہو جو ہمیشہ کے لئے جاری رہے تو اس کو دوامی سالیانہ یا محض دوامی کہتے ہیں، اگر یہ چند سالوں کے گزرنے کے بعد شروع ہونے والا ہو تو اسے غنیمتی دوامی کہتے ہیں۔

اگر کوئی سالیانہ متعدد سالوں تک ادا نہ ہوا ہو تو اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ سالیانہ اتنے سالوں سے 'برائندہ' ہے۔
۲۳۷۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں کیا گیا، اس کا کل زربحساب سود منفرد معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے اور ایک پونڈ کا ایک سال کا سود ۱۰ ش ہے، نیز سالوں کی تعداد ۱۰۰ ہے اور کل زربحساب ۱۰۰ سال کے آخر میں واجب الادا رقم ۱۰۰ ہے، اور اس رقم کا کل زربحساب ۱۰۰ سال کے لئے ۱۰۰ (۱-۱۰) ش ۱۰۰ ہے
دوسرے سال کے آخر میں مزید رقم ۱۰۰ واجب الادا ہے، اور اس رقم کا کل زربحساب ۱۰۰ (۲-۱۰) سال کے لئے ۱۰۰ (۲-۱۰) ش ۱۰۰ ہے

علیٰ ہذا القیاس
اب چونکہ کل یعنی کل زربحساب ان تمام کل زروں کے مجموعہ کے مساوی ہے

$$۱۰۰ = ۱۰۰ + (۱-۱۰) ش ۱۰۰ + \{ ۱۰۰ + (۲-۱۰) ش ۱۰۰ + \dots$$

$$\dots + \{ ۱۰۰ + (۱۰-۱۰) ش ۱۰۰ + \dots$$

جہاں سلسلہ بالا میں رقموں کی تعداد ۱۰۰ ہے

$$۱۰۰ = ۱۰۰ + (۱-۱۰) ش ۱۰۰ + \dots + (۱۰-۱۰) ش ۱۰۰ + \dots$$

$$= ۱۰۰ + (۱-۱۰) ش ۱۰۰$$

۲۳۸۔ ایک سالیانہ سالوں کی ایک خاص تعداد تک ادا نہیں کیا گیا، اس کا کل زربحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے اور ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زرمش ہے نیز سالوں کی تعداد n ہے اور حملہ کل زرمطلوبہ کا ہے۔

پہلے سال کے آخر میں ۱ واجب الادا ہے اور اس کا کل زرمباقی (ن-۱) سال کے لئے $1 \cdot n-1$ کے مساوی ہے، دوسرے سال کے آخر میں ایک اور رقم ۱ واجب الادا ہے اور اس کا کل زرمباقی (ن-۲) سال کے لئے $1 \cdot n-2$ ہے، اور علیٰ ائذا لقیاس تک = $1 \cdot n-1 + 1 \cdot n-2 + \dots + 1 \cdot n-1 + 1$

$$= 1 \cdot (1 + 1 + 1 + \dots + 1) \text{ (n times) } = n$$

$$= \frac{1 \cdot n \cdot (n+1)}{2}$$

۲۳۹۔ جب سالیانوں کی قیمت حاضرہ معلوم کرنا ہو تو روزِ جا سود کو ہمیشہ سود مرکب کے حساب سے شمار کرتے ہیں۔ اگر سود بحساب سود مفرد شمار کیا جائے تو نتائج ہمیشہ متضاد اور ناقابلِ اعتماد ماحصل ہوتے ہیں اس موضوع پر نیز سالیانوں کے مضمون کے متعلق مزید معلومات حاصل کرنے کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ انسٹی ٹیوٹ آف ایکچوئریز (Institute of actuaries) کی کتب درسیہ حصہ اول و دوم کا

اور نیز انسائیکلو پیڈیا بریتانیکا { Encyclopaedia Britannica

میں سالیانوں کی دفعہ کا مطالعہ کرے۔

۲۴۰۔ ایک سالیانہ سالوں کی محدود تعداد کے لئے جاری رہنے والا ہے، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سود مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے، ایک پونڈ کا کل زرم ایک سال میں n ہے، نیز سالوں کی تعداد n ہے اور مطلوبہ قیمت حاضرہ C ہے۔

سالیانہ ۱ جو ایک سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت
حاضرہ ۱-ش ہے
سالیانہ ۲ جو ۲ سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ
۱-ش ۲ ہے
سالیانہ ۳ جو ۳ سال کے بعد واجب الادا ہے اس کی قیمت حاضرہ
۱-ش ۳ ہے

علیٰ ہذا القیاس [ملاحظہ ہو دفعہ ۲۳۵]
اب چونکہ ح این تمام حاضرہ قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے
ح = ۱-ش ۱ + ۱-ش ۲ + ۱-ش ۳ + تان رقم

$$= \frac{۱-ش ۱}{۱-ش ۱}$$

$$= \frac{۱-ش ۱}{۱-ش ۱}$$

نوٹ۔ ک کی جو قیمت دفعہ ۲۳۸ میں معلوم کی گئی ہے اس کو
۱-ش ۱ پر تقسیم کرنے سے بھی مندرجہ بالا جواب حاصل ہو سکتا ہے۔
نتیجہ صریح۔ اگر ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو اس سے دوامی
سالیانہ کی قیمت حاضرہ کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$ح = \frac{۱}{۱-ش ۱} = \frac{۱}{ش ۱}$$

۲۴۱۔ اگر ایک سالیانہ ۱ کی قیمت حاضرہ ع ۱ ہو تو اسے یوں
بیان کرتے ہیں کہ سالیانہ کی قیمت ع سالوں کی خرید کے مساوی ہے

$$دوامی سالیانہ کی صورت میں ع ۱ = \frac{۱}{ش ۱}$$

اس لئے $\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$ شرح فیصد
 اس سے ظاہر ہے کہ یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی دوامی سالیانہ
 کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے ہمیں ۱۰۰ کو شرح فیصد پر تقسیم
 کرنا پڑتا ہے۔

بہت سے سرکاری تمسکوں میں، نیز رجسٹری شدہ کمپنیوں کے سرمایہ
 میں اور ریل کے حصے وغیرہ خریدنے میں جو روپیہ لگایا جاتا ہے وہ بعد از
 واگداشت نہیں کیا جاسکتا، اس لئے اس روپیہ سے جو مسائل آمدنی
 ہوتی رہتی ہے وہ دوامی سالیانوں کی بہترین مثال ہے۔ گورنمنٹ
 کے اعتبار کی بہترین جانچ اس امر سے ہو سکتی ہے کہ اس کے تمسکات
 کی قیمت کتنے سالوں کی خرید کے مساوی ہے۔ مثلاً $\frac{1}{2}$ فیصد
 والا ۹۰ پرکا "کونسل" ۳۶ سال کی خرید کے مساوی ہے، مصر کے
 ۴ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۹۶ پر ۲۴ سال کی خرید کے مساوی
 ہے اور آسٹریا کے ۵ فیصد والے سرمایہ کی قیمت ۸۰ پر صرف ۱۶ سال
 کی خرید کے مساوی ہے۔

۲۴۲۔ ایک ملتی سالیانہ ع سالوں کے بعد شروع ہو گا اور
 ن سال تک جاری رہے گا، اس کی قیمت حاضرہ بحساب سود
 مرکب معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سالیانہ ۱ ہے، ایک پونڈ کا ایک سال کا کل زر
 ش ہے اور قیمت حاضرہ ح ہے۔

پہلی قسط (ع + ۱) ویں سال کے آخر میں ادا ہوتی ہے [دفعہ ۲۳۶]
 اس لئے پہلی، دوسری، تیسری قسطوں کی حاضرہ قیمتیں بالترتیب
 رش - (ع + ۱)، رش - (ع + ۲)، رش - (ع + ۳).....

$$ح = ا ش - (۱+ع) + ا ش - (۲+ع) + ا ش - (۳+ع) + \dots + ا ش - (ن-۱+ع) + ا ش - ن$$

$$= ا ش - (۱+ع) \times \frac{۱-ش-۱}{۱-ش-۱}$$

$$= \frac{ا ش - ن}{۱-ش-۱} - \frac{ا ش - ع-۱}{۱-ش-۱}$$

نتیجہ صریح۔ ایک ملتی دوامی کا اجراء سالوں کے بعد شروع ہو گا، اس کی قیمت حاضرہ ضابطہ ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$ح = \frac{ا ش - ع}{۱-ش-۱}$$

۲۴۳۔ ملک سے ایسی جائیداد مراد ہوتی ہے جس سے دوامی سالیانہ حاصل ہوتا رہے، اس دوامی سالیانہ کو محاصل کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ کسی ملک کی قیمت وہی ہوگی جو ایک ایسے دوامی سالیانہ کی قیمت حاضرہ ہو جو محاصل کے مساوی ہے۔

دفعہ ۲۴۱ سے ظاہر ہے کہ اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کسی پٹہ دار کو کھیت مول لینے کے لئے دہائی سالوں کی خرید "ادا کرنی پڑتی ہے تو ۱۰۰ کو سالوں کی اس تعداد پر تقسیم کرنے سے ہم سود کی شرح فیصد معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال۔ ایک ملک کا حق بازگشت ۶ سال کے بعد ہونے والا ہے اس کو ۲۰ ہزار پونڈ میں خرید کر لیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب خریدار کو کس قدر محاصل وصول ہونے چاہئیں، معلوم ہے

$$لوک ۱۰۰ = ۵۰۲۱۱۸۹۳، لوک ۱۰۰ = ۱۳۳۰۰۹۶، ۱۲۴۱۳۵۸$$

یہاں محاصل ایک ایسے دوامی سالیانہ کی سالانہ قیمت کے مساوی ہیں جس کا اجراء ۶ سال کے بعد ہونے والا ہو اور جو ۲۰ ہزار پونڈ میں

خریدی جاسکتی ہو۔
فرض کرو کہ سالیانہ کی قیمت ۱ پونڈ فی سال ہے، چونکہ $ش = ۱۶.۵$

$$\frac{۶(۱۶.۵) \times ۱}{۶.۵} = ۲۰۰۰۰ \text{ لے}$$

$$۱۰۰۰ = ۶(۱۶.۵) \times ۱$$

لوک ۱۔ ۶ لوک $۱۶.۵ = ۳$

لوک ۱۔ $۳۶۱۲۷۱۳۵۸ = ۳۶۱۲۷۱۳۵۸$ لوک ۱۳۴۰۶۰۹۶ پونڈ اشلنگ اپنی
۱۔ ۱۳۴۰۶۰۹۶ اور محاصل $۱۳۴۰۶۰۹۶ = ۱۳۴۰۶۰۹۶$ پونڈ اشلنگ اپنی
۲۔ فرض کرو کہ پٹہ دار نے کوئی خاص رقم ادا کر کے کسی ملک کا
اجارہ (ع + ق) سالوں کے لئے حاصل کیا۔ ق سال گزر جانے
پر وہ ع + ن سالوں کے لئے نیا اجارہ حاصل کرنا چاہتا ہے،
جو رقم اسے اس غرض کے لئے ادا کرنی پڑتی ہے اسے ن سال کے لئے
تجدید اجارہ کا جرمانہ کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ملک کی سالانہ قیمت ۱ ہے، چونکہ پٹہ دار (ع + ن)
سال میں سے ع سال کی رقم ادا کر چکا ہے اس لئے جرمانہ اس ملے
سالیانہ ۱ کی قیمت حاضرہ کے مساوی ہوگا جو ع سال کے بعد
شروع ہو کر ن سال تک جاری رہے، پس

$$\text{جرمانہ} = \frac{\text{۱ش - ع}}{\text{۱ش - ۱}} - \frac{\text{۱ش - ع - ۱}}{\text{۱ش - ۱}} \dots \dots [دفعہ ۲۴۲]$$

مثلاً ۱۸ (ب)

جب تک کہ اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے سود کو
ہمیشہ سود مرکب تصور کیا جائے۔

۱۔ ۱۲۰ پونڈ کا ایک سالیانہ ۶ سال تک ادا نہیں ہوا۔ اگر

اس کا کل زر ۶۷ پونڈ ہو تو بحساب سود مفروضہ شرح فیصد دریافت کرو
۲۔ ۱۰۰ پونڈ کے ایک سالیانہ کا کل زر ۲۰ سال میں ۲۱ فیصد شرح
پر بحساب سود مرکب معلوم کرو، معلوم ہے
لوک $150.25 = 191163$

لوک $125114 = 13822290$
۳۔ ایک ملک ۲۷۵۰ پونڈ میں خریدی گئی، بتاؤ کہ یہ کس شرح
فیصد کے موافق اجارہ پردہ جائے کہ مالک کو قیمت خرید پر ۲ فیصد

نفع ہو۔
۴۔ ایک ملک کی سالانہ آمدنی ۱۷۰ پونڈ ہے، اس کو ۴ ہزار پونڈ
پرفروخت کرایا گیا ہے، سود کی شرح دریافت کرو۔

۵۔ اگر سود کی شرح ۱/۲ فی صد ہو تو بتاؤ کہ ایک ملک کے لئے
کتنے سال کی خرید، بطور قیمت ادا کرنی پڑے گی۔

۶۔ اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲۵ سال کی خرید کے مساوی
ہو تو ۶۲۵ پونڈ کے ایک ایسے سالیانہ کا کل زر دریافت کرو جو
۲ سال تک جاری رہنے والا ہو۔

۷۔ اگر ایک دوامی سالیانہ کی قیمت ۲ سال کی خرید کے مساوی ہو،
تو وہ سالیانہ معلوم کرو جو ۳ سال تک جاری رہے اور جو ۲۵۲۲ پونڈ
میں خریدیا جاسکے۔

۸۔ ۱۰۰ پونڈ سالانہ کی ایک ملک کا اجرا ۱۰ سال کے بعد شروع
ہونے والا ہے، اگر سود کی شرح ۴ فیصد ہو تو بتاؤ کہ اب یہ ملک
کتنے میں خریدی جاسکتی ہے،

لوک $102 = 140333$

لوک $4545565 = 829260$
۹۔ اگر سود ہر لمحہ واجب الادا ہو تو بتاؤ کہ کونسی رقم ۵۰ سال میں
۲ فیصد شرح پر ۵۰۰ پونڈ ہو جائے گی (۱۰۰ = ۶۳۷۷۸)

۱۰۔ ایک سالیانہ کے لئے جو دن سال تک جاری رہنے والا ہے

۲۵ سال کی خرید، ادا کرنی پڑتی ہے اور ایک اور سالیانہ کے لئے جو ۲ دن سال تک جاری رہنے والا ہے ۳۰ سال کی خرید، ادا کرنی پڑتی ہے، شرح فیصد دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک شخص ۵ ہزار پونڈ ۴ فیصد شرح پر بحساب سود مرکب قرض لیتا ہے، اگر اصل زر اور سود دونوں کو ۱۰ مساوی سالانہ قسطوں سے ادا کرنا مطلوب ہو تو ہر ایسی قسط کی مقدار معلوم کرو

$$\text{لوگ } 15.04 = 10.333 - 0.14$$

$$\text{اور لوگ } 445565 = 582944$$

۱۲۔ ایک شخص کے پاس ۲۰ ہزار پونڈ رأس المال ہے اور اس پر اسے ۵ فیصد کے حساب سے سود ملتا ہے، اگر وہ ۱۸۰۰ پونڈ سالانہ خرچ کرے تو ثابت کرو کہ وہ سترھویں سال کے اختتام سے قبل تباہ ہو جائے گا۔

$$\text{لوگ } 2 = 3.010300$$

$$\text{لوگ } 3 = 4.41213$$

$$\text{لوگ } 4 = 5.980$$

۱۳۔ ایک ملک کے سالانہ محاصل ۵۰۰ پونڈ ہیں، اور اسے ۲۰ سال کے لئے ابارہ پر دیا گیا ہے، اگر ۷ سال کے بعد پٹہ کی تجدید کرنا منظور ہو تو جبرانہ کی مقدار معلوم کرو جبکہ سود کی شرح ۶ فیصد ہو۔

$$\text{لوگ } 1.04 = 25.053059$$

$$\text{لوگ } 4410233 = 44988385$$

$$\text{لوگ } 44938820 = 31118.42$$

۱۴۔ اگر ایک سالیانہ کون ۲ دن، ۳ سال تک جاری رکھنے کے لئے بالترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج' سال کی خرید ادا کرنی پڑے تو ثابت کرو

ا۔ ب۔ اب + ب = اج

۱۵۔ ایک دوامی سالیانہ ایسا ہے کہ اس کی رو سے پہلے سال کے
آخر میں ۱۰ پونڈ واجب الادا ہوتے ہیں، دوسرے سال کے آخر
میں ۲۰ پونڈ اور تیسرے کے آخر میں ۳۰ پونڈ علیٰ ہذا القیاس ہر سال
کے آخر میں ۱۰ پونڈ کا اضافہ ہوتا جاتا ہے، اگر سود کی شرح ۵ فیصد فی
سال ہو تو سالیانہ کی قیمت حاضرہ معلوم کرو۔



انیسواں باب

لا تساویات

۴۵۲ - کوئی مقدار a کسی دوسری مقدار b سے بڑی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ $a > b$ مثبت ہو مثلاً ۲ بڑا ہے - ۳ سے کیونکہ ۲ - (۳) یعنی -1 مثبت ہے نیز مقدار b a سے چھوٹی اُس وقت کہلاتی ہے جبکہ $a < b$ منفی ہو مثلاً - ۵ چھوٹا ہے - ۲ سے کیونکہ - ۵ - (۲) یعنی - ۳ منفی ہے۔
 ظاہر ہے کہ اس تعریف کے بموجب صفر کو ہر منفی مقدار سے بڑا سمجھنا چاہئے۔

باب ہدایں تا وقتیکہ اس کے خلاف بالتصریح بیان نہ کیا جائے
 حروف سے ہمیشہ حقیقی مثبت مقدار میں تعبیر ہونگی۔

۴۵۳ - اگر $a < b$ تو ظاہر ہے کہ

$$a + c < b + c$$

$$a - c < b - c$$

$$a < b$$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

یعنی لا تساوی برقرار رہے گی اگر اس کے طرفین میں ایک ہی مثبت

۲۴۹۔ اگر $\bar{ا} < ب$ اور $ن$ اور $ق$ مثبت صحیح عدد ہوں
تو $\bar{ا} < \bar{ق}$ $\bar{ا} < \bar{ب}$

یعنی $\bar{ا} < ب$ اور $ب ابریں$ $\bar{ا} < ب$ یعنی
 $\bar{ا} < ب$ جہاں $ن$ کوئی مثبت مقدار ہے

نیز $\bar{ا} > \bar{ب}$ یعنی $\bar{ا} > ب$

۲۵۰۔ ہر حقیقی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے، یعنی یہ صفر سے
بڑا ہوتا ہے، مثلاً $(ا - ب)$ مثبت ہے

$$: ا - ب > ۰ \quad ا + ب > ۰$$

$$: ا + ب > ۰ \quad ا - ب > ۰$$

اسی طرح سے $\frac{ا}{ب} < \frac{ا}{ب}$

یعنی دو مثبت مقداروں کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی
سے بڑا ہوتا ہے۔

اگر مفادیر مذکورہ برابر ہوں تو لا تساوی، تساوی بن جاتی ہے۔

۲۵۱۔ جن لا تساویات میں ترتیب حروف متشاکل ہو ان
میں غرضیت کے ساتھ دیکھنا قبل کے نتائج بہت مفید اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ اگر $\bar{ا} < ب$ $ج$ مثبت مقدار کو تعبیر کریں تو ثابت کریں کہ

$$\bar{ا} + ب < ج + ب$$

$$\text{اور } ۲ (\bar{ا} + ب) < ج + ب + ج + ب$$

$$+ ب + ب$$

چونکہ $ب' + ج' < ۲ ب ج$ (۱)

$ج' + ا' < ۲ ج ا$

$ا' + ب' < ۲ ا ب$

اس لئے جمع کرنے سے $ا' + ب' + ج' < ۲ ب ج + ج ا + ا ب$
نیز یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ یہ جواب $ا' ب' ج'$ کی تمام حقیقی قیمتوں سے
درست ہے

نیز (۱) کی رو سے $ب' - ب ج + ج' < ب ج$ (۲)

$ب' + ج' < ب ج (ب + ج)$ (۳)

(۳) کے مماثل دو اور متشکل لاتساویات لکھنے اور جمع کرنے سے

$۲ (ا' + ب' + ج') < ب ج (ب + ج) + ج ا (ج + ا) + ا ب (ا + ب)$

$+ ا ب (ا + ب)$

اس میں ایک بات قابل غور ہے وہ یہ کہ (۲) (۳) کے طرفین کو جزو ضربی (ب + ج) سے
ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے، لیکن اگر جزو ضربی (ب + ج)
منفی ہو تو لاتساوی درست نہیں رہے گی۔
مثال ۲۔ اگر $ا$ کوئی حقیقی قیمت اختیار کر سکے تو بتاؤ کہ $۲ ا + ۱$ اور
 $ا' + ۱$ میں سے کونسی رتسم بڑی ہے۔

$(ا' + ۱) - (ا' + ۱) = لا' - لا - (لا - ۱)$

$= (لا' - ۱) (لا - ۱)$

$= (لا - ۱) (ا' + ۱)$

اس میں $(لا - ۱)$ ہمیشہ مثبت رہتا ہے، اس لئے $ا' + ۱$ اور $لا + ۱$
سے بڑا ہوگا اگر $(لا - ۱)$ مثبت ہو اور چھوٹا ہوگا اگر یہ منفی ہو

اگر اس کے اجزائے ضربی سب باہم مساوی ہوں۔ موجودہ صورت میں ان اجزائے ضربی میں سے ہر ایک $\frac{a}{n}$ کے مساوی ہے اور حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت $(\frac{a}{n})^n$ یا

$$(\frac{a + b + c + \dots + k}{n})^n$$

نتیجہ صریح۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج'، ... 'ک' غیر مساوی ہوں تو

$$(\frac{a + b + c + \dots + k}{n})^n < (a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k)$$

$$\text{یعنی } \frac{a + b + c + \dots + k}{n} < (a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot k)^{\frac{1}{n}}$$

انفاظ 'اوسط حسابی' اور 'اوسط ہندسی' کے معنوں میں توسیع کرنے سے یہ نتیجہ ذیل کے انفاظ میں بھی بیان ہو سکتا ہے۔
مثبت مفادیر کی کسی تعداد کا اوسط حسابی ان کے اوسط ہندسی سے بڑا ہوتا ہے۔

$$\text{مثال۔ ثابت کرو کہ } (\frac{a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n}{n})^n < (a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n)$$

جہاں 'ر' سے مراد کوئی حقیقی مقدار ہے۔

$$\text{چونکہ } \frac{a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n}{n} < (a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore (\frac{a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n}{n})^n < a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n \text{ یعنی } (a)^n < (a)^n$$

جس سے نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۵۴۔ اگر 'م'، 'ن'، ... مثبت صحیح عدد ہوں تو

ا ب ج کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جہاں

ا + ب + ج + مستقل ہے۔

چونکہ ل، م، ن مستقل ہیں اسلئے ا ب ج کی قیمت

بڑی سے بڑی ہوگی جب (ا) (ب) (ج) کی قیمت

بڑی سے بڑی ہو، لیکن مواخذہ از کرحلہ ل + م + ن + اجزائے

ضربی کا حاصل ضرب ہے بن کا حاصل جمع ل (ا) + م (ب) + ن (ج) +

..... یعنی ا + ب + ج + ہے جو مستقل ہے۔

پس ا ب ج کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ اجزائے
ضربی

$$\frac{ا}{ل} ، \frac{ب}{م} ، \frac{ج}{ن} ، \dots$$

سب باہم مساوی ہوں یعنی

$$\frac{ا}{ل} = \frac{ب}{م} = \frac{ج}{ن} = \frac{ا + ب + ج + \dots}{ل + م + ن + \dots}$$

لہذا بڑی سے بڑی قیمت ہوگی ل، م، ن (ا + ب + ج +)
(ل + م + ن +)

مثال - ل کی کسی حقیقی قیمت کے لئے جو تعداداً ا سے کم ہو
(ا - لا) (ا - لا) کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو۔

جملہ مذکورہ بڑے سے بڑا ہوگا جب (ا - لا) (ا - لا) بڑے

سے بڑا ہو، لیکن اس جملہ کے اجزاء کے ضربی کا مجموعہ $۳(۱+۱+۱) + ۳(۱-۱-۱)$ یعنی ۲ ہے اس لئے $(۱+۱+۱)(۱-۱-۱)$ کی قیمت بڑی سے بڑی

$$\text{اسوقت ہوگی جبکہ } \frac{۱-۱}{۳} = \frac{۱-۱}{۳} \text{ یعنی } ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

لہذا اس کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳}$ ہے۔

۲۵۵۔ بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں اکثر اوقات اوپر کے طریقوں کی نسبت زیادہ آسانی سے درجہ دوم کی ایک مساوات کو حل کرنے سے معلوم ہو سکتی ہیں۔ اس کی چند مثالیں باب نہم میں دی جا چکی ہیں، یہاں ہم ایک اور مثال درج کرتے ہیں۔
مثال۔ ایک طاق نمبر کو دو ایسے صحیح حصوں میں تقسیم کرو جن کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہو۔

فرض کرو کہ مذکورہ باطان نمبر $۱ + ۱$ ہے اور اس کے حصے ۱ اور ۲ $۱ + ۱ = ۲$ ہیں نیز ان کا حاصل ضرب $۱ \times ۱ = ۱$ ہے۔
تب $(۱ + ۱) = ۲$ اور $۱ \times ۱ = ۱$

جس سے $۲ = (۱ + ۱)$ اور $۱ = (۱ + ۱)$

لیکن علامت جذر کے اندر کی رقم مثبت ہونی چاہئے اس لئے صرف $\frac{۱}{۲}$ $(۱ + ۱)$ یعنی $۱ + ۱$ سے بڑا نہیں ہو سکتا نیز چونکہ ما صحیح عدد ہے اس لئے اس کی بڑی سے بڑی قیمت $۱ + ۱ = ۲$ ہو سکتی ہے، مگر اس قیمت کی رو سے $۱ = ۱ + ۱$ یا $۱ = ۱ + ۱$ پس دو حصے ۱ اور ۱ ہیں۔

۲۵۶۔ بعض اوقات ہم ذیل کا طریقہ اختیار کر سکتے ہیں۔

۱۹۔ اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور ۲ سے بڑا ہو تو بتاؤ کہ

$$n < 1 + \sqrt[n]{n-1}$$

۲۰۔ ثابت کرو کہ $(n) > n \left(\frac{1+n}{2} \right)^n$

۲۱۔ ثابت کر کے

$$(1) (a+b+c)^2 < (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$$

$$(2) (a+b+c)^2 < (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$$

۲۲۔ $(a+b+c)^2 < (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو جبکہ a, b, c اور ۲ کے درمیان ہو۔

$$۲۳۔ \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} \text{ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت دریافت کرو۔}$$

۲۴۔ اگر a, b اور c مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{a+b}{2} < \frac{a+b+c}{3}$$

م کوئی مثبت کسر واجب ہو۔

$$\text{ظاہر ہے کہ } \frac{a+b}{2} = \frac{a+b+c}{3} + \frac{a-b-c}{6}$$

اور چونکہ $\frac{a-b-c}{6}$ کم ہے $\frac{a+b}{2}$ سے اس لئے ہم ان دونوں جملوں کو $\frac{a+b}{2}$

کی صعودی قوتوں کی رقوم میں پھیلا سکتے ہیں (دیکھو دفعہ ۱۸۴)

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a+b+c}{3} + \frac{(a-b-c)^2}{6} + \frac{(a-b-c)^3}{54} + \dots$$

$$+ \frac{(a-b-c)^4}{1296} + \dots$$

(۱) اگر m کوئی مثبت صحیح عدد ہو یا کوئی منفی مقدار ہو تو بائیں جانب

$$\text{کی سب رقوم مثبت ہوں گی، اسلئے } \frac{a+b}{2} < \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

(۲) اگر m مثبت ہو اور a سے کم ہو تو بائیں جانب کی سب رقوم

$$\text{پہلی رقم کے بعد منفی ہوں گی اسلئے } \frac{a+b}{2} > \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

(۳) اگر $m < 1$ اور مثبت ہو تو m کو $\frac{1}{n}$ کے مساوی فرض کرو جہاں $n > 1$

$$\text{تب } \left(\frac{a+b}{2} \right)^m = \left(\frac{a+b}{2} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a+b}{2} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \left(\frac{a+b}{2} \right)^m < \frac{\left(\frac{a+b}{2} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{a+b}{2} \right)^{\frac{1}{n}}}{2} \dots \dots (2) \text{ کی رو سے}$$

$$\therefore \left(\frac{a+b}{2} \right)^m < \frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{a+b}{2} \right)^m < \frac{a+b}{2}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا اگر $m = 0$ یا a تو لاتساوی، تساوی بن جاتی ہے۔
۲۵۸۔ اگر n مثبت مقادیر a, b, c, \dots, k ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{a+b+c+\dots+k}{n} < \frac{a+b+c+\dots+k}{n}$$

سوائے اُس صورت کے جب m کوئی مثبت کسر واجب ہو۔
فرض کرو کہ m کی قیمت کچھ ہی ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع نہیں ہے۔

جملہ a, b, c, \dots, k پر غور کرو اور فرض کرو کہ a اور b

غیر مساوی ہیں، اگر ہم a اور b دونوں کی بجائے دو مساوی مقادیر $\frac{a+b}{2}$ اور $\frac{a+b}{2}$ درج کر دیں تو ایسا کرنے سے $a+b+a$ ج + + ک کی قیمت میں تو کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی لیکن $a+b+a$ ج + + ک کی قیمت کم ہو جاتی ہے۔
 کیونکہ $a+b+a$ ج + + ک $\frac{a+b}{2}$ پس جب تک مقادیر a ، b ، a ج + + ک میں سے کوئی دو مقادیر غیر مساوی رہیں ہم ہمیشہ $a+b+a$ ج + + ک کی قیمت کو کم و بیش کئے بغیر $a+b+a$ ج + + ک کی قیمت کو کم کر سکتے ہیں پس $a+b+a$ ج + + ک کی قیمت کم سے کم اس صورت میں ہوتی ہے جبکہ مقادیر a ، b ، a ج + + ک سب کی سب باہم مساوی ہوں یعنی ہر ایک مقدار $\frac{a+b+a}{3}$ ج + + ک کے مساوی ہو۔

اس صورت میں $a+b+a$ ج + + ک کی قیمت $\frac{a+b+a}{3}$ ج + + ک کے مساوی ہوتی ہے اس لئے اگر a ، b ، a ج + + ک غیر مساوی ہوں تو $\frac{a+b+a}{3}$ ج + + ک $\frac{a+b+a}{3}$ ج + + ک $\frac{a+b+a}{3}$ ج + + ک اگر کم، صف اور ایک کے درمیان واقع ہو تو ہم اسی طرح سے ثابت کر سکتے ہیں کہ لاتساوی کی علامت $<$ جابجا ہوگی۔
 عام الفاظ میں اس مسئلہ کو یوں بھی بیان کر سکتے ہیں۔

لیکن $\frac{1}{\lambda} \text{ لوک } \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = 2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^4}{5} + \dots \right)$ [نقصہ ۲۶]

اور $\frac{1}{\mu} \text{ لوک } \frac{\mu+1}{\mu-1} = 2 \left(1 + \frac{\mu^2}{3} + \frac{\mu^4}{5} + \dots \right)$

ان دونوں سلسلوں میں سوائے رقم اول کے پہلے سلسلہ کی ہر ایک رقم دوسرے سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے، اس لئے

$$\frac{1}{\lambda} \text{ لوک } \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < \frac{1}{\mu} \text{ لوک } \frac{\mu+1}{\mu-1}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۶۱۔ ثابت کرو کہ اگر $\lambda < \mu$ تو $(\lambda+1)^{\lambda-1} < (\mu+1)^{\mu-1}$

اس سے مستنبط کرو کہ $\frac{1}{\lambda} \text{ لوک } \frac{\lambda+1}{\lambda-1} < \frac{1}{\mu} \text{ لوک } \frac{\mu+1}{\mu-1}$

$(\lambda+1)^{\lambda-1} (\lambda-1)^{\lambda-1} < (\mu+1)^{\mu-1} (\mu-1)^{\mu-1}$ کو ض سے تبخیر کرو

لوک ض = $(\lambda+1) \text{ لوک } (\lambda+1) + (\lambda-1) \text{ لوک } (\lambda-1)$

= $\lambda \text{ لوک } (\lambda+1) - (\lambda-1) \text{ لوک } (\lambda-1)$

+ لوک $(\lambda-1)$

$$= 2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^4}{5} + \dots \right) - \left(2 \left(1 + \frac{(\lambda-1)^2}{3} + \frac{(\lambda-1)^4}{5} + \dots \right) \right)$$

$$= 2 \left(\frac{\lambda^2}{3} - \frac{(\lambda-1)^2}{3} + \frac{\lambda^4}{5} - \frac{(\lambda-1)^4}{5} + \dots \right)$$

پس لوک ض مثبت ہے اور اس لئے ض > 1

$$\text{یعنی } (1+a)^{1+y} (1-a)^{1-y} < 1$$

اس نتیجہ میں رکھو $1 = \frac{y}{e}$ جہاں $e < y$

$$\text{تب } (1 + \frac{y}{e})^{1+\frac{y}{e}} (1 - \frac{y}{e})^{1-\frac{y}{e}} < 1$$

$$\text{نہ } (\frac{y+e}{e})^{1+\frac{y}{e}} (\frac{y-e}{e})^{1-\frac{y}{e}} < 1 \text{ یعنی } 1$$

$$\text{نہ } (y+e)^{1+\frac{y}{e}} (y-e)^{1-\frac{y}{e}} < e^2$$

اب $y+e$ کو 1 کے اور $y-e$ کو b کے مساوی رکھو جس سے

$$\frac{1+b}{2} = e$$

$$\text{نہ } 1 < (\frac{1+b}{2})^{1+b}$$

مشکلہ نمبری ۱۹ (ب)

۱- ثابت کرو کہ $1 < (1 + \frac{1}{n})^n$ (ج)

۲- ثابت کرو کہ $n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ (ج)

۳- ثابت کرو کہ اگر $m < n$ تو پہلے n جفت اعداد کی m وین قوتوں کا حاصل جمع n (ن) سے بڑا ہوتا ہے۔
 ۴- اگر m اور n دو مثبت مقادیر ہوں اور $m < n$ سے تو ثابت کرو کہ

$$(1 + \frac{1}{m})^m < (1 + \frac{1}{n})^n$$

اس سے بتاؤ کہ اگر $n < 1$ تو $(1 + \frac{1}{n})^n$ کی قیمت ۲ اور ۱۸.۷۱۸

کے درمیان واقع ہوتی ہے۔
۵۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' کی قیمتیں نزولی ترتیب میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{ج+ا}{ج-ا}\right) > \left(\frac{ج+ب}{ج-ب}\right)$$

۶۔ ثابت کرو کہ $\left(\frac{ا+ب+ج+...+ک}{ن}\right)$

$$> \frac{ا+ب+ج+...+ک}{ن}$$

۷۔ ثابت کرو کہ اگر $م < ن$ تو $\frac{ا}{م} > \frac{ا}{ن}$ لو کہ (۱+ا)

۸۔ اگر 'ن' کوئی مثبت صحیح عدد ہو اور $لا > ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱-لا}{ن} > \frac{۱-لا^{ن+۱}}{ن+۱}$$

۹۔ اگر 'ا'، 'ب'، 'ج' سلسلہ موسیقیہ میں ہوں اور $ن < ۱$ تو ثابت

$$کر کہ \frac{ا}{ن} + \frac{ب}{ن} < \frac{ج}{ن}$$

۱۰۔ اگر 'لا' مثبت ہو اور 'ا' سے کم ہو تو 'لا' (۳-ا-لا) کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو، نیز معلوم کرو کہ اگر 'لا' کوئی کسر واجب

ہو تو 'لا' (۱-ا) کی بڑی سے بڑی قیمت کیا ہوگی۔

۱۱۔ اگر 'لا' مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{لا}{لا+۱} < لا اور لا > \frac{لا}{لا+۱}$$

۱۲۔ اگر 'لا'، 'ما'، 'می' = ۱ تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{لا} + \frac{۱}{ما} + \frac{۱}{می} > ۱$ کی

چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۹ ہے اور (۱-ا) (۱-ما) (۱-می) < ۸ لای

۱۳- ثابت کرو کہ (ا+ب+ج+د) (ا+ب+ج+د) < (ا+ب+ج+د) (ا+ب+ج+د)

۱۴- ثابت کرو کہ ذیل کے دونوں جملے مثبت ہیں

(ا-ا) (ب-ا) (ج-ا) (د-ا) (ج-ب) (ب-ج) (ج-د) (د-ج) (ج-ب)

اور (ا-ا) (ب-ا) (ج-ا) (د-ا) (ج-ب) (ب-ج) (ج-د) (د-ج) (ج-ب)

۱۵- ثابت کرو کہ اگر م < ن تو (لا+ما) > (لا+ما) م

۱۶- ثابت کرو کہ (ا+ب) > (ا+ب) م

۱۷- ا، ب، ج، د حسب معمول ایک مثلث کے اضلاع کے طولوں کو تغیر کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ جملہ

(۱) (ا-ا) (ب-ا) (ج-ا) (د-ا) (ج-ب) (ب-ج) (ج-د) (د-ج) (ج-ب) منفی نہیں ہو سکتا، جہاں ن، ق، ر کوئی حقیقی مقادیر ہیں۔
(۲) (ا+ما) + (ب+می) لا + ج لا + ما مثبت نہیں ہو سکتا اگر لا + ما + می =

۱۸- ثابت کرو کہ لا ۱ لا ۲ لا ۳ ... لا ۱۲ لا ۱۳ < (ا-ا)

۱۹- اگر ا، ب، ج، د، ... تعدادیں ک مثبت صحیح عدد ہوں جن کا حاصل جمع ن ہو اور ن کو ک پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت اور باقی بالترتیب قی اور صی ہوں تو ثابت کرو کہ

لا ۱ لا ۲ لا ۳ ... لا ۱۲ لا ۱۳

کی کم سے کم قیمت (ا-ا) (ق-ک) (ا+ا) صی ہے۔

بیسواں باب

انتہائی قیمتیں اور کسور منعدم

۲۶۲۔ اگر کوئی مستقل محدود مقدار ہو تو لا کو کافی طور پر بڑھانے سے ہم کسر $\frac{1}{n}$ کی قیمت کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں، بالفاظ دیگر لا کو کافی بڑا لینے سے $\frac{1}{n}$ کی قیمت صفر کے اتنی قریب لائی جا سکتی ہے جتنی ہم چاہیں۔ اس مفہوم کو مختصراً یوں بیان کرتے ہیں کہ جب لا لامتناہی ہو تو $\frac{1}{n}$ کی انتہا یا نہایت صفر ہوتی ہے۔

نہلان اس کے جیسے جیسے لا کم ہوتا جاتا ہے کسر $\frac{1}{n}$ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے اور ہم لا کو کافی حد تک چھوٹا کرنے سے $\frac{1}{n}$ کی قیمت کو اتنا بڑھا سکتے

ہیں جتنا کہ ہم چاہیں مثلاً جب لا صفر ہو جائے تو $\frac{1}{n}$ کی انتہا محدود نہیں رہتی۔ اس کو بالعموم یوں بیان کرتے ہیں کہ جب لا صفر ہو تو $\frac{1}{n}$ کی انتہائی قیمت لامتناہی ہو جاتی ہے۔

۲۶۳۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا بڑھ جاتی ہے یا لا متناہی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر بڑی سے بڑی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لا سکیں زیادہ ہو جاتی ہے۔

اسی طرح جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کوئی مقدار لا انتہا چھوٹی ہو جاتی ہے تو اس سے ہماری یہ مراد ہوتی ہے کہ مقدار زیر بحث ہر چھوٹی سے چھوٹی مقدار سے جس کو ہم ذہن میں لا سکیں کم ہو جاتی ہے۔

کسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لا انتہا بڑی ہو جائے علامت ∞ کے ذریعے تعبیر کیا جاتا ہے، اور کسی ایسی مقدار کی قیمت کو جو لا انتہا چھوٹی ہو جائے علامت 0 سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۲۶۴۔ ان علامات کے استعمال سے دفعہ ۲۶۲ کے دو مطالب اس طرح ادا کئے جاسکتے ہیں

اگر لا ∞ ہو تو $\frac{1}{لا}$ ہوتا ہے '۰'

اگر لا '۰' ہو تو $\frac{1}{لا}$ ہوتا ہے ∞ لیکن طرز بیان کے اس مختصر طریقہ کو اختیار کرتے وقت یاد رہے کہ یہ علامتیں درحقیقت زیادہ مفصل و مشرق زبانی الفاظ کا محض اختصار ہیں۔

۲۶۵۔ اس سے قبل جہاں کہیں ہم نے لفظ "انتہا" کا استعمال کیا ہے طالب علم کو غالباً اس کا مفہوم سمجھنے میں کوئی دقت واقع نہیں ہوئی ہوگی لیکن چونکہ علم ریاضی کے اعلیٰ طبقوں کے لئے الفاظ "نہایت" اور "انتہائی قیمت" کے مفہوم کو زیادہ صحت اور عملگی کے ساتھ سمجھ لینا نہایت ضروری ہے اس لئے ہم یہاں ان کے استعمال اور معانی کی مزید توضیح کر دینا مناسب سمجھتے ہیں۔

۲۶۶۔ تعریف۔ اگر کوئی تعادل (ما =) ف (لا) ایسا ہو کہ جیسے لا، ۱ کے قریب آتا جائے ف (لا) اور ایک ثابت مقدار ب کے فرق کو اتنا کم کر دینا ممکن ہو بتنا کہ ہم چاہیں تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ ما کی انتہا ب ہے جسے لا مائل بہ ۱ ہو۔

مثلاً اگر سلسلہ $1 + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} + \dots$ کی ن رقموں کے مجموعہ کو ج سے تعبیر کیا جائے تو ج = $2 - \frac{1}{۲} - \frac{1}{۲} - \dots$ [دفعہ ۵۶]

ترتیب میں ہیں، اس میں لا کو کافی طور پر چھوٹا کرنے سے ہم آخری رقم لا کو رقم ماضی کے حاصل جمع سے مقابلہ اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں اور لا کو کافی طور پر بڑا کرنے سے ہم ابتدائی رقم لا کو رقم ماضی کے حاصل جمع سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔

مثال ۱۔ ن کو کافی بڑا کرنے سے ہم ن۔ ۵ ن۔ ۷ ن + ۹ کی پہلی رقم کو باقی رقموں کے مجموعہ سے اتنا بڑا بنا سکتے ہیں جتنا کہ ہم چاہیں۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ ہم پورے جلد کی بجائے صرف پہلی رقم یعنی ن لے سکتے ہیں بشرطیکہ ن کو کافی بڑا بنانے سے جلد مذکور اور ن کے تفاوت کو حسب خواہش کم کر دیا جائے۔

مثال ۲۔ $\frac{۳ - لا^۳}{۵ - لا^۵}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ (۱) لا، لامتناہی

ہو اور (۲) لا صفر ہو

(۱) شمار کنندہ اور منب نامیں ہم پہلی رقم کے سوائے باقی سب

رقوم کو نظر انداز کر سکتے ہیں اسلئے انتہا مطلوبہ $\frac{۳ - لا^۳}{۵ - لا^۵} = \frac{۳}{۵}$ ہے۔

(۲) جب لا، لامتناہی چھوٹا ہو تو انتہا مطلوبہ $\frac{۳ - لا^۳}{۵ - لا^۵}$ یعنی $\frac{۳}{۵}$ ہوگی۔

مثال ۳۔ $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$ کی انتہا معلوم کرو جب لا صفر ہو۔

فرض کرو کہ رقم مذکور ض کے مساوی ہے، تب لوکارتم لینے سے

$$\text{لوک ض} = \frac{۱}{لا} \left\{ \text{لوک (لا + ۱)} - \text{لوک (لا - ۱)} \right\}$$

$$= (۱ + \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا^۲} + \frac{۱}{لا^۳} + \dots) - (\dots - \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا^۲} - \frac{۱}{لا^۳} + \dots) \dots \dots (دفعہ ۲۲۶)$$

جس سے ظاہر ہے کہ لوک ض کی انتہا ۲ ہے، پس مطلوبہ انتہا کی قیمت ۲ ہے۔

کسور منقسم

۲۷۱- فرض کرو کہ کسر

$$\frac{۱۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰۰}{۱۰ - ۱۰۰}$$

کی انتہا دریافت کرنا مطلوب ہے جبکہ $۱۰ = ۱$
اگر ہم ۱۰ کو $۱ + ۹$ کے مساوی رکھیں تو جوں جوں ۱۰ کی قیمت ۱
کے قریب آتی جائے گی ۹ کی قیمت صفر کے قریب آتی جائے گی۔
 ۱۰ کی بجائے $۱ + ۹$ سے مندرج کرنے سے

$$\frac{۱۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰۰}{۱۰ - ۱۰۰} = \frac{۱۰۰ + ۹۰ - ۱۰۰۰}{۱۰ - ۱۰۰} = \frac{۱۰۰ + ۹۰ - ۱۰۰۰}{۱۰ - ۱۰۰}$$

جب ۹ لا انتہا چھوٹا ہو تو اس جملہ کی انتہا $\frac{۱۰}{۱۰}$ ہوگی۔
اس سوال کو ہم ایک اور نقطہ نظر سے بھی دیکھ سکتے ہیں

$$\frac{۱۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰۰}{۱۰ - ۱۰۰} = \frac{(۱۰ + ۱۰۰)(۱ - ۱۰)}{(۱۰ - ۱۰۰)(۱ - ۱۰)} = \frac{۱۰ + ۱۰۰}{۱۰ - ۱۰۰}$$

اس وقت $۱۰ = ۱$ رکھنے سے جملہ مذکورہ بالا کی قیمت حسب سابق $\frac{۱۰}{۱۰}$
ملکتی ہے۔

اگر ہم جملہ زیر بحث $\frac{۱۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰۰}{۱۰ - ۱۰۰}$ میں اختصار سے قبل $۱۰ = ۱$

رکھیں تو ہم دیکھیں گے کہ کسر بالا صفر کی شکل اختیار کر لیتی ہے جس کی
قیمت معین نہیں کی جاسکتی۔ نیز ہم دیکھتے ہیں اس کا یہ شکل اختیار
کرنا شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں میں جزو ضربی $(۱ - ۱۰)$ کی
موجودگی کی وجہ سے ہے۔

اب ہم جزو ضربی صفر پر تو تقسیم نہیں کر سکتے لیکن یہ ضرور ہے کہ

جب تک لا، ار کے عین مساوی نہیں ہوتا ہم جزو ضروری لا۔ ار کو شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں سے نکال سکتے ہیں۔
اس کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے لا کی قیمت ار کے قریب آتی جاتی ہے، کسر زیر بحث کی قیمت $\frac{1}{2}$ کے نزدیک ہوتی چلتی ہے یعنی دفعہ ۲۶۶ کی تعریف کے بموجب

$$\text{اگر } لا = ۱ \text{ تو } لا^۲ - لا - ۱ \text{ کی انتہا } \frac{1}{2} \text{ ہے۔}$$

۲۷۲۔ اگر ف (لا) اور فہ (لا) کے دو تفاعل ہوں جن میں سے ہر ایک تفاعل لا کی کسی خاص قیمت ار کے لئے صفر ہو جائے تو کسر ف (لا) شکل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ اختیار کرتی ہے، اس قسم کی کسر کو کسر غیر معین یا کسر منعدم کہتے ہیں۔

مثال ۱۔ اگر لا = ۳ تو $\frac{لا^۲ - لا - ۳}{لا^۲ - لا - ۳}$ کی انتہا دیانہ کو

جب لا = ۳ تو یہ کسر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی غیر معین صورت اختیار کر لیتی ہے، لیکن شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں سے جزو ضروری (لا-۳) نکال دینے سے کسر بالا $\frac{لا^۲ - لا - ۳}{لا^۲ - لا - ۳}$ رہ جاتی ہے اور جب لا = ۳ تو یہ $\frac{1}{1}$ ہو جاتی ہے، پس $\frac{1}{1}$ مطلوبہ انتہا ہے۔

مثال ۲۔ کسر $\frac{لا^۳ - لا^۲ - ۱}{لا^۳ - لا^۲ - ۱}$ کی قیمت جبکہ لا = $\frac{1}{2}$ صفر ہو جاتی ہے، اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو اصم $\frac{1}{2}$ لا - ۱ - $\frac{1}{2}$ کی مزدوج اصم سے ضرب دیا

تب کسر مذکور

$$\frac{2}{\sqrt{3-4+4+4+4+4}} \text{ یا } \frac{(3-4)-(4+4)}{(4-4)(4-4+4+4+4+4)}$$

ہو جائے گی۔ اس میں لا = ۱ رکھنے سے اس کی انتہا $\frac{1}{12}$ نکلتی ہے۔

مثال ۳۔ کسر $\frac{1-3\sqrt{4}}{1-4\sqrt{4}}$ کی قیمت جب لا = ۱ صفحہ صفحہ ہو جاتی ہے اس کی انتہا معلوم کرنے کے لئے لا = ۱ + ۱۰۰ رکھو اور مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ تب کسر مذکورہ

$$\frac{(1-3\sqrt{4})(1+100)}{(1-4\sqrt{4})(1+100)} = \frac{1-3\sqrt{4}}{1-4\sqrt{4}}$$

$$= \frac{1-3\sqrt{4}}{1-4\sqrt{4}}$$

جب لا = ۱۰۰ تو ۱۰۰ اس لئے مطلوبہ انتہا $\frac{5}{12}$ ہے۔
۲۷۳۔ بعض اوقات کسی مساوات کے سروں میں ایسا تعلق ہوتا ہے جس کی وجہ سے اس مساوات کی اصلیں غیر یقین صورت آتی ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ $۱ + لا + ب = ج + لا + د$

تب $(۱ - ج) لا = د - ب$

$$\therefore لا = \frac{د - ب}{۱ - ج}$$

اب اگر $۱ = ج$ تو لا = $\frac{د - ب}{0}$ یا ∞

پس ایک سادہ (خطی) مساوات کی اصل لا متناہی ہوتی ہے اگر
لا کا سر لا انتہا چھوٹا ہو۔
۴۷-۲۔ ہمزاد مساواتوں

$$لا + با + ما + ج = .$$

$$لا + با + ما + ج = .$$

$$\text{کامل لا} = \frac{\text{با ج} - \text{با ج}}{\text{اب} - \text{اب}} = \frac{\text{ج لا} - \text{ج لا}}{\text{اب} - \text{اب}} \text{ ہے}$$

اگر اب - اب = . تو لا اور ما دونوں لا متناہی ہو جاتے ہیں

$$\text{اس صورت میں } \frac{لا}{با} = \frac{با}{ج} \text{ (جو فرض کر دیکہ) } = م$$

لا اور با کی قیمتیں بالترتیب م اور م اور با م دوسری مساوات
میں مندرج کرنے سے یہ مساوات لا + با + ما + ج = . ہو جاتی ہے

اگر ج = . ج کے مساوی نہ ہو تو دو مساواتوں لا + با + ما + ج = .

اور لا + با + ما + ج = . کا اختلاف صرف رقم مطلق میں ہے

اور غیر مطابق ہونے کی وجہ سے یہ لا اور ما کی کسی عدد و قیمت
سے پوری نہیں ہو سکتیں -

$$\text{اگر ج = . ج کے مساوی ہو تو } \frac{لا}{با} = \frac{با}{ج} = \frac{ج}{ج} \text{ یعنی}$$

دونوں مساواتیں ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہیں -

اس صورت میں چونکہ با ج = . اور ج لا = .

اس لئے لا اور ما دونوں کی قیمتیں صفر ہو جاتی ہیں اور بنا بریں

ان ہمزاد مساواتوں کا حل غیر معین ہو جاتا ہے، درحقیقت اس

صورت میں ہمارے پاس صرف ایک ہی مساوات ہے جس میں دو مجہول مقادیر شامل ہیں اور ایسی مساوات صرفاً مجہول مقادیر کی لا تعداد قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۱۳۸] طالب علم اگر ہندسہ تحلیلی سے واقف ہے تو اس کو خط مستقیم کے ہندسہ کے موافق ان نتائج کو ہندسی معنی پہنانے میں کوئی دقت پیش نہیں آئے گی۔

۲۷۵۔ اب ہم چند ایسی خصوصیات پر بحث کرتے ہیں جو مساوات درجہ دوم کے حل میں پیش آتی ہیں۔
فرض کرو کہ مساوات $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$ ہے
اگر $ج = ۰$ تو $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$

جس سے $۱ = ۰$ یا $۱ = ۰$ یعنی مساوات کی ایک اصل صفر

ہے اور دوسری $۱ = ۰$ اگر $ب = ۰$ تو اصلیں یکجا نامقلد کے مساوی لیکن مختلف علامت ہیں [دفعہ ۱۱۸]

اگر $۱ = ۰$ تو مساوات $ب + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$ ہو جاتی ہے اور بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس صورت میں درجہ دوم کی مساوات کی صرف ایک اصل رہ جاتی ہے، لیکن چونکہ درجہ دوم کی ہر مساوات کی دو اصلیں ہونی چاہئیں اس لئے ہم دوسری اصل کی قیمت پر حسب ذیل بحث کرتے ہیں۔

ابتدائی مساوات میں ۱ کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ لکھو اور کسروں کو صاف کرو، تب

$$ج + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$$

اب $۱ = ۰$ رکھنے سے $ج + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۰$ ، اس کا حل ہے $۱ = ۰$ یا $ج = ۰$

یعنی لا = ∞ یا - ج

پس اگر درجہ دوم کی کسی مساوات میں لا کا سر صفر ہو جائے تو مساوات کی ایک اصل لامتناہی ہوتی ہے۔
اعلیٰ ریاضی کی اکثر شاخوں میں یہ نتیجہ مندرجہ بالا الفاظ میں مرقوم کیا جاتا ہے لیکن بتدی کو یاد رہے کہ درحقیقت یہ الفاظ ذیل کے تفصیلی الفاظ کا سہولت بخش اقتباس ہیں۔

مساوات لا + ب لا + ج = ۰ میں اگر لا بہت چھوٹا ہو تو مساوات کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے اور جب لا، لا انتہا کم ہوتا جاتا ہے تو یہ اصل لا انتہا بڑی ہوتی جاتی ہے، اس صورت میں محدود اصل اپنی انتہا - ج کے نہایت قریب آتی جاتی ہے اسی طرح ان صورتوں پر بھی جن میں ایک سے زیادہ سر مفقود ہوں بحث کی جاسکتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲۰

ذیل کے جملوں کی انتہائیں معلوم کر دے جب (۱) لا = ∞ (۲) لا = ۰۔

$$۱ - \frac{(۲ - لا)(۳ - لا)}{۳ + لا} \quad ۲ - \frac{(۱ - لا)(۳ - لا)}{۹ + لا}$$

$$۳ - \frac{(۲ + لا)(۳ - لا)}{(۹ - لا)(۱ + لا)} \quad ۴ - \frac{(۳ - لا)(۵ + لا)}{۳(۱ + لا)}$$

$$۵ - \frac{لا - ۱}{لا} \div \frac{لا - ۱}{لا}$$

ذیل کے جملات کی انتہائیں معلوم کر دے۔

$$۶ - \frac{لا + ۱}{لا - ۱} \quad جبکہ لا = ۱$$

$$۸- \frac{۱۰-۱۰}{۱۰} \text{ جبکہ } ۱۰=۰$$

$$۹- \frac{۱۰-۱۰}{۱۰(۱+۱)} \text{ جبکہ } ۱۰=۰$$

$$۱۰- \frac{۱۰-۱۰}{۱۰-۱۰} \text{ جبکہ } ۱۰=۱$$

$$۱۱- \frac{\sqrt{۱۰-۱۰} + \sqrt{۱۰-۱۰}}{\sqrt{۱۰-۱۰}} \text{ جب } ۱۰=۱۰$$

$$۱۲- \frac{۱۰(۱+۱+۱)}{۱۰(۱-۱)} \text{ جب } ۱۰=۰$$

$$۱۳- \frac{۱-۱۰}{۱۰-۱۰} \text{ جب } ۱۰=۱$$

$$۱۴- \frac{\frac{۱}{۱}(۱-۱) + \frac{۱}{۱}(۱-۱)}{\frac{۱}{۱}(۱-۱) + \frac{۱}{۱}(۱-۱)} \text{ جب } ۱۰=۱$$

$$۱۵- \frac{\sqrt{۱۰+۱۰} - \sqrt{۱۰+۱۰}}{\sqrt{۱۰+۱۰} - \sqrt{۱۰+۱۰}} \text{ جب } ۱۰=۰$$

$$۱۶- \left\{ \frac{۱+۱}{۱} - \frac{۱+۱}{۱} \right\} \text{ جب } ۱۰=۰$$

$$۱۷- \frac{۱}{۱-۱} \text{ جب } ۱۰=۰$$

$$۱۸- \frac{\sqrt{۱۰+۱۰}}{۱۰-۱۰} \text{ جب } ۱۰=۰$$

۲۷۸۔ اگر ہم کسی سلسلہ کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کر سکیں تو یہ دیکھنے سے کہ n کو لا انتہا بڑا بنانے پر حاصل جمع محدود محدود رہتا ہے یا غیر محدود ہو جاتا ہے ہم فوراً معلوم کر سکتے ہیں کہ سلسلہ زیر بحث مستدق ہے یا متنع۔ مثلاً سلسلہ $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

کی پہلی n رقموں کا حاصل جمع $\frac{1 - 1^{n+1}}{1 - 1}$ ہے۔

جب لا تعداد ایک سے کم ہو تو حاصل جمع ایک محدود انتہا $\frac{1}{1-1}$ کے بتدریج قریب آ جاتا ہے، اس لئے اس صورت میں سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

اگر لا تعداد ایک سے بڑا ہو تو n کو کافی طور پر بڑا کرنے سے پہلی n رقموں کے حاصل جمع یعنی $\frac{1 - 1^{n+1}}{1 - 1}$ کی قیمت کو ہر محدود مقدار سے بڑا بنایا جاسکتا ہے۔ اس لئے اس صورت میں سلسلہ بالامتنع ہوتا ہے۔

اگر $1 = 1$ تو پہلی n رقموں کا مجموعہ n ہوگا، اس لئے سلسلہ متنع ہوگا۔
اگر $1 = 1$ ۔ تو سلسلہ بالامتنع

$$1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

ہو جاتا ہے۔ اس میں پہلی جفت رقم کا مجموعہ صفر ہے اور پہلی طاق رقم کا مجموعہ ایک ہے۔

یعنی حاصل جمع صفر اور ایک کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ لہذا یہ سلسلہ ان سلسلوں کے قبیل میں سے ہے جن کو اہتزازی سلسلے یا دوری مستدق سلسلے کہتے ہیں۔

۲۷۹۔ ایسی صورتیں اکثر پیش آتی ہیں جن میں ہم پہلی n رقم کا

حاصل جمع معلوم نہیں کر سکتے، اس لئے ذیل میں ہم ان قواعد پر بحث کرینگے جن کے ذریعہ جمع کا عمل کئے بغیر یہ معلوم ہو سکے کہ کوئی دیا ہوا سلسلہ مستحق ہے یا مستع۔

۲۸۰۔ اگر کسی سلسلہ کی متبادل رقوم مثبت اور منفی ہوں اور ہر رقوم اپنی رقوم باقبل سے تعداداً کم ہو تو سلسلہ مستحق ہوگا سلسلہ کو

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + \dots \text{ سے تعبیر کرو}$$

$$\text{جہاں } ۱ < ۲ < ۳ < ۴ < ۵ < ۶ < ۷ < ۸ < \dots$$

اس سلسلہ کو ذیل کی ہر دو اشکال میں لکھا جاسکتا ہے

$$(۱) \dots + (۶ - ۵) + (۷ - ۶) + (۸ - ۷) + \dots$$

$$(۲) \dots - (۵ - ۶) - (۶ - ۷) - (۷ - ۸) - \dots$$

پہلی شکل سے یہ واضح ہوتا ہے کہ سلسلہ کا حاصل جمع ایک مثبت

مقدار کے مساوی ہے اور دوسری شکل سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ رقوم کی کسی تعداد کا مجموعہ ۱ سے کم ہے۔ لہذا سلسلہ مستحق

۲۸۱۔ مثلاً سلسلہ

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \dots$$

مستحق ہے، دفعہ ۲۴۲ میں ۱ = ۱ رکھنے سے ظاہر ہے کہ

اس سلسلہ کا حاصل جمع لوگوں ۲ ہے۔

نیز سلسلہ

$$\dots + \frac{۴}{۴} - \frac{۶}{۵} + \frac{۵}{۶} - \frac{۴}{۷} + \frac{۳}{۸} - \frac{۲}{۹} + \dots$$

کی ہر ایک رقم اپنی رقم ماقبل سے تعداد کم ہے، اس لئے یہ سلسلہ مستدق ہے۔ یہ سلسلہ ذیل کے دو سلسلوں کا مجموعہ ہے

$$(۱) \dots\dots\dots + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \dots\dots\dots (۱)$$

$$(۲) \dots\dots\dots + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots\dots\dots (۲)$$

اب (۱) تو لوک ۲ کے مساوی ہے اور (۲) تعداد رقوم کے جفت ہونے کی صورت میں صفر کے اور طاق ہونے کی صورت میں ۱ کے مساوی ہے۔ پس سلسلہ ہذا مستدق ہے اور اسکا حاصل جمع تعداد رقوم کے جفت ہونے کی صورت میں لوک ۲ کی اور طاق ہونے کی صورت میں ۱+ لوک ۲ کی طرف استدقاق کرتا ہے۔

۲۸۲۔ اگر ایک لامتناہی سلسلہ کی سب رقوم کی علامت ایک ہی ہو اور ہر ایک رقم کسی محدود مقدار سے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو بڑی ہو تو سلسلہ متعرج ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر ہر ایک رقم کسی محدود مقدار کے سے بڑی ہو تو پہلی ن رقوم کا حاصل جمع ن کے سے بڑا ہوگا اور ظاہر ہے کہ ن کو کافی طور پر بڑا لینے سے ن کے کو ہمیشہ کسی خاص محدود مقدار سے بڑا بنایا جاسکتا ہے۔

۲۸۳۔ استدقاق اور اتساع کی جانچ کے متعلق مزید تحقیقات کرنے سے قبل ذیل میں ہم چند ایسے اصول درج کر دینا چاہتے ہیں جن کو کم و بیش حد تک علوم متعارفہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

(۱) اگر کوئی سلسلہ مستدق ہو تو یہ مستدق رہے گا اور اگر یہ متعرج ہو تو متعرج رہے گا جب اس میں اس کی رقوم کی ایک خاص تعداد جمع کر دی جائے یا نکال دی جائے، کیونکہ ان جمع کردہ

یا تفریق کردہ رقموں کا حاصل جمع ہمیشہ ایک محدود مقدار کے مساوی ہوتا ہے۔

(۲) اگر ایک ایسا سلسلہ جن کی سب رقوم مثبت ہوں مستحق ہو تو یہ سلسلہ اس صورت میں بھی مستحق رہے گا جبکہ اس کی کل رقوم کچھ چند رقوم کو منفی بنا دیا جائے کیونکہ کسی سلسلہ کا حاصل جمع اس صورت میں صریحاً بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ اس سلسلہ کی سب رقوم کی علامت ایک ہی ہو۔

آئندہ ہم مان لیں گے کہ سب رقوم مثبت ہیں جب تک اس کے خلاف بالقصریح نہ بیان کیا گیا ہو۔

۲۸۴۔ اگر کسی لامتناہی سلسلہ میں ایک مقررہ رقم سے شروع ہو کر اس کے بعد کی رقوم میں ہر رقم کی نسبت اپنی رقم ماقبل کے ساتھ ایک ایسی مقدار سے تعداداً کم رہے جو خود ایک سے تعداداً کم ہے تو سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی سلسلہ میں ایک خاص رقم اور اس رقم کے بعد کا حصہ سب ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{e}{1} + \frac{e}{2} + \frac{e}{3} + \frac{e}{4} + \dots \\ \text{اور } & \frac{e}{1} > \frac{e}{2} > \frac{e}{3} > \frac{e}{4} > \dots \\ & \text{جہاں } 1 > 2 > 3 > 4 > \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{تب } \dots + \frac{e}{1} + \frac{e}{2} + \frac{e}{3} + \frac{e}{4} + \dots \\ & = \left(1 + \frac{e}{1} + \frac{e}{2} + \frac{e}{3} + \frac{e}{4} + \dots \right) \times \frac{e}{1} \\ & > \left(1 + \frac{e}{1} + \frac{e}{2} + \frac{e}{3} + \frac{e}{4} + \dots \right) \times \frac{e}{1} \end{aligned}$$

اور ایک مقررہ رقم سے آگے اس کے بعد کی رقوم میں ہر رقم کی نسبت
رقم ماقبل کے ساتھ ایک کے مساوی ہو یا ایک سے زیادہ ہو
تو سلسلہ متع ہوگا۔

فرض کرو کہ مقررہ رقم E ہے، اگر نسبت مذکورہ ایک کے
مساوی ہو تو رقوم مابعد میں سے ہر ایک رقم E کے برابر ہوگی
اور N رقوم کا مجموعہ $N \times E$ ہوگا، پس سلسلہ متع ہوگا۔
اگر یہ نسبت ایک سے زیادہ ہو تو رقم مقررہ کے بعد ہر ایک رقم E سے بڑی ہوگی
اور N رقوم کا مجموعہ $N \times E$ سے بڑا ہوگا، یعنی سلسلہ متع ہوگا
۲۸۷۔ آزمائش کے اس طریقہ کو عملی طور پر استعمال کرتے وقت
یہ معلوم کرنے کی زحمت سے بچنے کے لئے کہ کونسی رقم کے بعد
ہر رقم اپنی رقم ماقبل سے کم یا زیادہ ہونا شروع ہوتی ہے
یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ نسبت $\frac{E}{E-1}$ کی نہایت یا

انتہا معلوم کر لی جائے جبکہ N لانتہا بڑا ہو
فرض کرو کہ یہ انتہا L ہے

اگر $L > 1$ تو سلسلہ مستحق ہوگا (دفعہ ۲۸۴)

اگر $L < 1$ تو سلسلہ متع ہوگا (دفعہ ۲۸۶)

اگر $L = 1$ تو سلسلہ مستحق ہوگا یا متع، اور استدقاق و
اتساع کی تحقیق کے لئے فرید آزمائش کی ضرورت ہوگی کیونکہ یہ ممکن
ہے کہ کسر $\frac{E}{E-1}$ ایک سے کم ہو اور N کے لانتہا بڑھ

جائے سے انتہائی صورت میں یہ نایک ہو گئی ہو اس صورت میں
ہم کوئی محدود مقصد نہیں بتا سکتے جو ایک سے کم ہو مگر L
سے زیادہ ہو۔ پس اس صورت میں دفعہ ۲۸۴ کی جانچ کام نہیں
دیتی لیکن اگر $\frac{E}{E-1} < 1$ اور N کے لانتہا بڑھ جائے سے

انتہائی صورت میں یہ ایک کے قریب آگئی ہو تو دفعہ ۲۸۶ کی رُو سے سلسلہ متسع ہوگا۔

ہم الفاظ ” $\frac{ع}{ع-۱}$ “ کی انتہا جب ن لامتناہی ہو“ کی بجائے
اختصاراً علامت نہا $\frac{ع}{ع-۱}$ استعمال کریں گے۔

مثال ۱۔ ایک سلسلہ کی ن وین رقم $\frac{(ن+۱) لا}{ن}$ ہے، بتاؤ کہ
سلسلہ مستدق ہے یا متسع۔

$$\text{یہاں } \frac{ع}{ع-۱} = \frac{(ن+۱) لا}{ن} \div \frac{ن لا^{۱-۵}}{(ن-۱)^۲} = \frac{(ن+۱)(ن-۱) لا^۲}{ن}$$

$$\text{نہا } \frac{ع}{ع-۱} = لا$$

پس اگر لا > 1 تو سلسلہ مستدق ہوگا
اور اگر لا < 1 تو سلسلہ متسع ہوگا

لیکن اگر لا = 1 تو نہا $\frac{ع}{ع-۱} = 1$ ، اور مزید آزمائش کی ضرورت
ہوگی۔

مثال ۲۔ بتاؤ کہ ذیل کا سلسلہ مستدق ہے یا متسع

$$۱ + ۲ لا + ۳ لا^۲ + ۴ لا^۳ + \dots$$

$$\text{یہاں نہا } \frac{ع}{ع-۱} = \frac{ن لا^{۱-۵}}{(ن-۱) لا^{۲-۵}} = لا$$

پس اگر لا > 1 تو سلسلہ مستدق ہوگا
اگر لا < 1 تو سلسلہ متسع ہوگا

اگر لا = ۱ تو سلسلہ بالا

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

ہو جاتا ہے جو صریحاً متع ہے

مثال ۳۔ سلسلہ

$$1 + (1+2) + (2+3) + (3+4) + \dots + (n-1+n) + 1$$

$$\text{میں نہا} = \frac{1 + (n-1) + 1}{1 + (n-1) + 1} = 1$$

پس اگر لا > ۱ تو سلسلہ بالا مستحق ہوگا اور اس کا حاصل جمع محدود ہوگا۔ [دیکھو دفعہ ۶، نتیجہ صریح]

۲۸۸۔ اگر دو لامتناہی سلسلوں میں سے ہر ایک کی سب رقوم مثبت ہوں اور ان سلسلوں کی متناظر رقوم کی نسبت ہمیشہ محدود رہے تو یہ سلسلے یا دونوں مستحق ہوں گے یا دونوں متع۔ فرض کرو کہ یہ لامتناہی سلسلے

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$$

ہیں تب کسر

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots}{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots$$

کی قیمت کسور

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

میں سے بڑی سے بڑی کسر اور چھوٹی سے چھوٹی کسر کی قیمتوں کے درمیان واقع ہوگی۔ [دیکھو دفعہ ۱۲]

اور بنا بریں ایک محدود مقدار کے مساوی ہوگی، فرض کرو کہ یہ محدود مقدار $ل$ ہے

$$ل = ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_n$$

لہذا اگر ایک سلسلہ کی قیمت محدود ہو تو دوسرے سلسلہ کی قیمت بھی محدود ہوگی، اور اگر ایک سلسلہ کی قیمت غیر محدود ہو تو دوسرے سلسلہ کی قیمت بھی غیر محدود ہوگی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸۹۔ مندرجہ بالا اصول نہایت مفید اور کار آمد ہے کیونکہ اسکی مدد سے ایک سلسلہ کا مقابلہ کسی اور ایسے سلسلہ سے کر سکتے ہیں جس کا مستحق یا متبع ہونا پہلے تحقیق ہو چکا ہے۔ دفعہ مابعد میں جس سلسلہ پر بحث کی گئی ہے اس کو بطور معاون سلسلہ کے لینا اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۹۰۔ لامتناہی سلسلہ

$$\frac{1}{۱} + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots$$

ہمیشہ متبع ہوتا ہے سوائے اس صورت کے جبکہ $ق$ مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ $ق < ۱$

پہلی رقم ۱ ہے، بعد کی دو رقمیں ملکر $\frac{۲}{۱}$ سے کم ہیں، ان کے

بعد کی چار رقمیں ملکر $\frac{۴}{۱}$ سے کم ہیں، ان کے بعد کی آٹھ رقمیں

ملکر $\frac{۸}{۱}$ سے کم ہیں، علیٰ ہذا القیاس پس کل سلسلہ

$$۱ + \frac{۲}{۱} + \frac{۴}{۱} + \frac{۸}{۱} + \dots$$

کے حاصل جمع سے

کم ہے، لیکن موخر الذکر سلسلہ ہندسی سلسلہ ہے جس میں مشترک نسبت
 $\frac{1}{2}$ ہے، ہر ایک سے کم ہے کیونکہ $Q < 1$ ، اس لئے یہ سلسلہ مستحق
 ہے اور بنابرین سلسلہ زیر بحث بھی مستحق ہے۔
 صورت دوم۔ فرض کرو کہ $Q = 1$

تب سلسلہ زیر بحث، $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ ہو جاتا ہے
 ظاہر ہے کہ تیسری اور چوتھی رقیں ملکر بڑی ہیں $\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سے
 بعد کی چار رقیں بڑی ہیں $\frac{1}{4}$ یعنی $\frac{1}{4}$ سے، ان کے بعد کی آٹھ
 رقیں بڑی ہیں $\frac{1}{8}$ یعنی $\frac{1}{8}$ سے اور علیٰ ہذا القیاس، پس سلسلہ
 زیر بحث بڑا ہے

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

سے اور اس لئے متع ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۸۶)

صورت سوم۔ فرض کرو کہ $Q > 1$ یا منفی ہے۔
 اس صورت میں سلسلہ زیر بحث کی ہر ایک رقم صورت دوم کے
 سلسلہ کی متناظر رقم سے بڑی ہے، لہذا اس صورت میں سلسلہ
 متع ہے۔

پس سلسلہ زیر بحث ہمیشہ متع ہوتا ہے سوائے اُس صورت کے
 جبکہ Q مثبت ہو اور ایک سے زیادہ ہو۔

مثال۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

متع ہے۔

اس سلسلہ کا مقابلہ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ کے

اگر سلسلہ زیر بحث اور معاون سلسلہ کی n ویں رقم بالترتیب n اور

$$m$$
 ہوں تو $\frac{n}{m} = \frac{n+1}{m+1} \div \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

پس نہا $\frac{n}{m} = 1$ لہذا یہ سلسلے یا دونوں متسع ہیں یا دونوں مستحق ہیں، لیکن چونکہ معاون سلسلہ متسع ہے اس لئے سلسلہ زیر تحقیق بھی متسع ہے۔

اس سے دفعہ ۲۸۸ کی مثال اکا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔
۲۹۱۔ دفعہ ۲۸۸ کے قاعدہ سے استفادہ کرنے کے لئے ضروری ہے

کہ $\frac{n}{m}$ کی انتہا محدود ہو اور یہ انتہا محدود ہوگی اگر ہم معاون سلسلہ ذیل کے طریقہ سے معلوم کریں۔

دئے ہوئے سلسلہ کی n ویں رقم n اور n کی طرف سب سے بڑی قوتوں کو باقی رکھو۔ جو رقم اس طرح سے حاصل ہو اس کو n سے تعبیر کرو، تب دفعہ ۲۸۰ کی رو سے $\frac{n}{m}$ کی انتہا محدود ہوگی، بعد ازاں n کو معاون سلسلہ کی n ویں رقم کے طور پر لیا جاسکتا ہے

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ جس سلسلہ کی n ویں رقم $\frac{1}{5+n+2n^2+3n^3}$ ہے

وہ متسع ہے۔

جوں جوں n بڑھتا جاتا ہے n کی قیمت

$$\frac{1}{5+n+2n^2+3n^3} \times \frac{2n^3}{3n^4} \text{ یا } \frac{2n^3}{3n^4}$$

کے قریب آتی جاتی ہے، پس اگر $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ تو نہا $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$ جو ایک محدود مقدار ہے، ہم اس سلسلہ کو جس کی n دیں رقم $\frac{1}{n}$ ہے معاون سلسلہ کے طور پر لے سکتے ہیں، لیکن چونکہ یہ معاون سلسلہ دفعہ ۲۹۰ کی رو سے متع ہے اس لئے سلسلہ زیر بحث بھی متع ہے۔

مثال ۲۔ معلوم کرو کہ وہ سلسلہ جس میں $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}$ مستق ہے یا متع۔

$$\text{یہاں } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{n}$$

$$= \left(1 - \dots + \frac{1}{n+9} - \frac{1}{n+3} + 1 \right) \frac{1}{n}$$

$$= \dots + \frac{1}{n+9} - \frac{1}{n+3} =$$

$$\text{اگر ہم } \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ لیں تو}$$

$$\dots + \frac{1}{n+9} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ نہا}$$

لیکن معاون سلسلہ

$$\dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}$$

مستدق ہے، اس لئے سلسلہ زیر بحث بھی مستدق ہے۔
 ۲۹۲۔ اگر $(۱+۱)$ کو مسئلہ شنائی سے پھیلا یا جائے تو ثابت کرو کہ
 یہ پھیلاؤ مستدق ہوتا ہے جبکہ $۱ > ۱$
 فرض کرو کہ تفصیل کی ر میں اور $(۱+۱)$ میں رقمیں بالترتیب

ر اور ۱ ہیں، تب

$$\frac{۱+۱}{۱} = \frac{۱-۱}{۱}$$

جب $۱ < ۱$ تو یہ نسبت منفی ہوتی ہے، یعنی اگر لا مثبت
 ہو تو اس مقام سے رقوم سلسلہ متبادلاً مثبت اور منفی ہوتی ہیں اور
 اگر لا منفی ہو تو اس مقام کے بعد سلسلہ کی سب رقموں کی علامت
 وہی رہتی ہے۔

اب اگر ر، لا متناہی ہو تو نہا $\frac{۱+۱}{۱} = لا$ (تعداداً) اس لئے
 اگر سب رقوم کی علامت وہی ہو تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے جب
 $۱ > ۱$ ، اور بنا بریں دفعہ ۲۸۳ کی رو سے یہ اس صورت میں
 بھی مستدق ہوتا ہے جبکہ چند رقوم مثبت ہوں اور چند منفی۔
 ۲۹۳۔ ثابت کرو کہ صعودی قوتوں میں لا کی تفصیل لا کی سب
 قیمتوں کے لئے مستدق ہوتی ہے۔

یہاں $\frac{۱}{۱-۱} = لا$ لو کہو، اس لئے نہا $\frac{۱}{۱-۱}$ عن

خواہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ لہذا سلسلہ مستدق ہے۔
 ۲۹۴۔ ثابت کرو کہ لا کی صعودی قوتوں میں لوک $(۱+۱)$ کی تفصیل
 مستدق ہوتی ہے جبکہ لا تعداداً ایک سے کم ہو۔
 یہاں $\frac{۱}{۱-۱} = لا$ کی عددی قیمت $\frac{۱}{۱-۱}$ لا جسکی انتہا لا ہے،

پس سلسلہ مستدق ہوگا جب لا ایک سے کم ہو۔

اگر لا = ۱ تو سلسلہ ۱ - $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$ + ہو جاتا ہے جو دفعہ ۲۸ کی رو سے مستدق ہے۔

اگر لا = -۱ تو سلسلہ ۱ - $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ - $\frac{1}{4}$ - ہو جاتا ہے جو دفعہ ۲۹ کی رو سے متنع ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ صفر کا لوکارتم لامتناہی اور منفی ہوتا ہے اور یہ امر مساوات $\infty = 0$ پر غور کرنے سے بھی ظاہر ہے۔

۲۹۵۔ ذیل کی دو مثالوں کے جواب نہایت ضروری ہیں، باب ہذا میں ان کی ضرورت پیش آئے گی۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا، لامتناہی ہو۔
لا = $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$ رکھو، تب

$$\frac{\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}}{\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} + \dots} = \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$$

$$\frac{1}{\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} + \dots} =$$

نیز جب لا لامتناہی ہو تو ما بھی لامتناہی ہوتا ہے اس لئے کہہ بالا کی قیمت صفر ہے
مثال ۲۔ ثابت کرو کہ جب ن لامتناہی ہو تو ن لا کی انتہا صفر ہو
ہے جبکہ لا > ۱

فرض کرو کہ لا = $\frac{1}{\text{ما}}$ یعنی ما < ۱ نیز فرض کرو کہ ما = ۱

$$\text{اب نہا} = \frac{\text{لوک} (1 + \text{ن})}{\text{نہا}} = \left(\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}^2} + \dots \right) = 1$$

کیونکہ جب ع کی انتہا ایک ہو تو ن کی انتہا صفر ہوتی ہے۔
پس اگر (۲) مستحق ہو تو (۱) بھی مستحق ہوگا اور حاصل ضرب
محدود ہوگا۔

مثال - ثابت کرو کہ جب ن لامتناہی ہو تو ذیل کے حاصل ضرب
کی انتہا محدود ہوتی ہے

$$\frac{1 + \text{ن}^2}{\text{ن}^2} \times \frac{1 - \text{ن}^2}{\text{ن}^2} \times \dots \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{3}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$$

یہ حاصل ضرب ن^2 اجزائے ضربی پر مشتمل ہے، اگر دو دو رقوم کے
مسل زوجوں کو ع ، ع ، ع ، ع ، ع ، ع ، ع ، ع سے اور حاصل ضرب کو ض
سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ض} = \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع} \times \text{ع}$$

$$\text{جہاں } \frac{1}{\text{ن}^2} - 1 = \frac{1 + \text{ن}^2}{\text{ن}^2} \times \frac{1 - \text{ن}^2}{\text{ن}^2} = \text{ع}$$

لیکن $\text{لوک ض} = \text{لوک ع} + \text{لوک ع} + \text{لوک ع} + \text{لوک ع} + \dots + \text{لوک ع}$
اب ہمیں یہ دکھانا ہے کہ اس سلسلہ کی قیمت محدود ہے (۱)

$$\text{لوک ع} = \text{لوک} \left(1 - \frac{1}{\text{ن}^2} \right) = \frac{1}{\text{ن}^2} - \frac{1}{\text{ن}^4} - \frac{1}{\text{ن}^6} - \dots$$

لہذا دفعہ ۲۹۱ مثال ۲ کے موافق یہ سلسلہ مستحق ہے اور مذکورہ حاصل
ضرب محدود ہے۔

۲۹۷ - علم ریاضی کے مسائل کی تحقیقات میں لامتناہی سلسلے
بہت کثرت سے واقع ہوتے ہیں، ان سے متعلق ہر موقع پر یہ معلوم
کر لینا نہایت ضروری ہے کہ یہ سلسلے مستحق ہیں یا نہیں، اگر ہم کسی

سلسلہ کو استعمال کرنے سے قبل اس کے استدقاق کے متعلق مناسب توثیق نہ کر لیں گے تو ممکن ہے کہ ہمارے محصلہ نتائج نہایت جہل اور لغو ہوں۔ (دیکھو دفعہ ۱۸۳)

مثلاً اگر ہم (۱- لا) کو مسئلہ شنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو

$$(۱- لا) = ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots$$

لیکن اگر ہم بائیں جانب کے سلسلہ کا حاصل جمع n رقموں تک دفعہ ۲ کے قاعدہ کے مطابق معلوم کریں تو

$$۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots + لا^n = \frac{۱ - لا^{n+۱}}{۱ - لا} - \frac{لا^{n+۱}}{۱ - لا}$$

اس سے $\frac{۱}{۱ - لا} = ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots + لا^n + \frac{لا^{n+۱}}{۱ - لا}$ لیکن جب n کو لا انتہا بڑا کر دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{۱ - لا} \text{ کو سلسلہ } ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots \text{ کا حقیقی معادل اسی}$$

صورت میں کہہ سکتے ہیں جبکہ $\frac{لا^n}{۱ - لا} + \frac{لا^{n+۱}}{۱ - لا}$ محدود ہو جائے لیکن جب n لا انتہا بڑا ہو جائے تو یہ مقدار لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے اگر لا > ۱ یا لا < ۱ اور لا انتہا چھوٹی ہو جاتی ہے اگر لا < ۱ (دیکھو دفعہ ۱۹۵)

پس ہم صرف اسی صورت میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$\frac{۱}{۱ - لا} = ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots \text{ تا لا انتہا}$$

جبکہ لا < ۱ اگر مسئلہ شنائی کے مطابق $\frac{۱}{۱ - لا}$ کی مندرجہ بالا تفصیل کو لا کی

ہر قیمت کے لئے درست مانا جائے اور اسکی تفصیل کو $\frac{1}{(۱-۳)}$ کے معادل کے طور پر استعمال کیا جائے تو لازماً ہمارے نتائج غلط اور مہمل ہوں گے۔

بالفاظ دیگر ہم اس لا متناہی سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \dots$ کو غلطی کے احتمال کے بغیر اپنی سلک استدلال میں صرف اسی صورت میں لا سکتے ہیں جبکہ یہ سلسلہ مستحق ہو در نہ نہیں۔
 متبع سلاسل کی دقتوں کی وجہ سے ہمیں مجبوراً کسی سلسلہ اور اس کے جبر یہ معادل میں تیز کرنا پڑتا ہے، مثلاً لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو ہم ہمیشہ اکو $(۱-۳)$ پر تقسیم کرنے سے سلسلہ

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \dots$$

کی جتنی قیمتیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اور اس طرح سے ایک معنی

میں $\frac{1}{(۱-۳)}$ کو سلسلہ بالا کا جبر یہ معادل کہا جا سکتا ہے، لیکن

ہم دیکھ چکے ہیں کہ فی الواقع یہ تعادل صرف اسی صورت میں درست ہوتا ہے جبکہ سلسلہ بالا مستحق ہو۔ اس نقطہ نظر کو ملحوظ رکھ کر اگر ہم $\frac{1}{(۱-۳)}$ کو سلسلہ بالا کا تفاعل نگوینی کہیں تو شاید زیادہ مناسب ہو گا کسی سلسلہ کے تفاعل نگوینی سے وہ تفاعل مراد ہے کہ اگر اس تفاعل کو جبر و متقابل کے معمولی قواعد کے مطابق پھیلا یا جائے تو سلسلہ مذکور حاصل ہو۔
 الفاظ ”نگوینی تفاعل“ کی تشریح مکمل طور پر متوالی سلسلوں کے ضمن میں کی جائے گی۔

مثلاً نمبری ۲۱ (۱)

معلوم کر دو کہ ذیل کے سلسلے مستحق ہیں یا متبع

$$(۱) \quad \frac{1}{۱} - \frac{1}{۱+۳} + \frac{1}{۱+۳+۵} - \frac{1}{۱+۳+۵+۷} + \dots$$

جہاں لا اور لا دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

$$\dots + \frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} \quad (۲)$$

$$\dots + \frac{1}{(3+6)(3+4)} - \frac{1}{(2+6)(2+4)} + \frac{1}{(1+6)(1+4)} - \frac{1}{لا 6} \quad (۳)$$

جہاں لا اور لا دونوں مثبت مقداریں ہیں۔

$$\dots + \frac{۲۱}{۵ \times ۴} + \frac{۲۱}{۴ \times ۳} + \frac{۲۱}{۳ \times ۲} + \frac{۲۱}{۲ \times ۱} \quad (۴)$$

$$\dots + \frac{۲۱}{۸ \times ۷} + \frac{۲۱}{۷ \times ۶} + \frac{۲۱}{۶ \times ۵} + \frac{۲۱}{۵ \times ۴} \quad (۵)$$

$$\dots + \frac{۲۱}{۱۱} + \frac{۲۱}{۱۲} + \frac{۲۱}{۱۳} + ۱ \quad (۶)$$

$$\dots + \frac{۲۱}{۵} + \frac{۲۱}{۴} + \frac{۲۱}{۳} + \frac{۲۱}{۲} \quad (۷)$$

$$\dots + ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + لا ۱۱ \quad (۸)$$

$$\dots + \frac{۵}{۵} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۲} + \frac{۲}{۱} \quad (۹)$$

$$\dots + \frac{لا ۱۱}{۱+۵} + \dots + \frac{۲۱}{۱۰} + \frac{۲۱}{۵} + \frac{۲۱}{۲} + ۱ \quad (۱۰)$$

$$\dots + لا \frac{۱-۵}{۱+۵} + \dots + لا \frac{۱۵}{۱۲} + لا \frac{۸}{۱۰} + لا \frac{۳}{۵} + لا \quad (۱۱)$$

$$\dots + لا \frac{۲-۵}{۱+۲} + \dots + لا \frac{۱۳}{۱۲} + لا \frac{۶}{۹} + لا \frac{۲}{۵} + ۱ \quad (۱۲)$$

$$\dots + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} \quad (۱۳)$$

$$(۱۳) \dots + \frac{۵}{۳} (۱ + ۵) + \dots + \frac{۳}{۲۶} + \frac{۳}{۸} + ۲$$

$$(۱۵) \dots + \left(\frac{۳}{۳} - \frac{۳}{۳} \right) + \left(\frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۳} \right) + \left(\frac{۲}{۱} - \frac{۲}{۳} \right)$$

$$(۱۶) \dots + \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۳} + \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} + ۱$$

(۱۶) جن سلسلوں کی ن میں رقوم حسب ذیل ہیں ان کی جانچ کرو

$$(۱) \sqrt{۱ + ۲} - \sqrt{۱ + ۳} \quad (۲) \sqrt{۱ + ۳} - \sqrt{۱ + ۴}$$

(۱۸) ذیل کے سلسل کی جانچ کرو۔

$$(۱) \dots + \frac{۱}{۳ + ۵} + \frac{۱}{۲ + ۵} + \frac{۱}{۱ + ۵} + \frac{۱}{۵}$$

$$(۲) \dots + \frac{۱}{۲ + ۵} + \frac{۱}{۲ - ۵} + \frac{۱}{۱ + ۵} + \frac{۱}{۱ - ۵} + \frac{۱}{۵}$$

جہاں لا کوئی مثبت کسر ہے۔

(۱۹) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\dots + \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۳} + \frac{۳}{۴} + ۱$$

ق کی تمام قیمتوں کے لئے مستحق ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ لا متناہی سلسلہ

$$\dots + ۴ + ۴ + ۴$$

مستحق ہوگا اگر نہا $\frac{۱}{۵}$ کم ہو ایک سے اور مقبوع ہوگا اگر یہ بڑا ہو ایک سے۔

(۲۱) ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$\frac{۵۲}{۳۵۲} \times \frac{۲-۵۲}{۱-۵۲} \times \frac{۲-۵۲}{۳-۵۲} \dots \dots \frac{۶}{۵} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳}$$

محدود ہوگا جب n غیر محدود ہو۔

(۲۲) ثابت کرو کہ اگر $la = 1 + (la)^n$ کی تفصیل میں کوئی رقم لامتناہی نہیں ہوگی سوائے اس صورت کے جبکہ n منفی ہو اور تعداد ایک سے بڑا ہو۔

۲۹۸۔ کسی سلسلہ کے استدقاق یا اتساع کی جانچ کرنے کے لئے جو قواعد دفعات ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹ میں قبل از این مذکور ہو چکے ہیں وہ بالعموم کافی ثابت ہوتے ہیں، تاہم دفعہ مابعد میں ہم ایک اور مسئلہ ثابت کریں گے جس کی مدد سے ہم معاون سلسلہ

$$\dots \dots \dots + \frac{1}{۳^n} + \frac{1}{۴^n} + \frac{1}{۵^n}$$

کے ذریعہ کسی سلسلہ کو جانچنے کے چند اور قواعد مستفیض ہو سکیں گے جو اکثر اوقات مفید اور کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۲۹۹۔ دو لامتناہی سلسلوں کی n دیں ہمیں بالترتیب e اور f ہیں اور ان سلسلوں کی سب رتبعیں مثبت ہیں، تب اگر دسلسلہ مستحق

ہو تو e سلسلہ بھی مستحق ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد $\frac{e}{e-1} > \frac{f}{f-1}$ اور اگر دسلسلہ متع ہو تو e سلسلہ بھی متع ہوگا جب کسی مقررہ رقم کے بعد

$$\frac{e}{e-1} < \frac{f}{f-1}$$

فرض کرو کہ مقررہ رقم بالترتیب e اور f ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ $\frac{e}{e-1} > \frac{f}{f-1}$ ، $\frac{e}{e-1} > \frac{f}{f-1}$ ، \dots

تب $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$= \left(1 + \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \dots \right) \frac{1}{1}$$

$$> \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \dots \right) \frac{1}{2}$$

$$\text{یعنی } > \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) \frac{1}{3}$$

اس لئے اگر سلسلہ استدق ہو تو $\frac{1}{1}$ سلسلہ بھی مستدق ہوگا۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ $\frac{1}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{4} < \dots$

تب $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$$= \left(1 + \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \dots \right) \frac{1}{1}$$

$$< \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \dots \right) \frac{1}{2}$$

$$\text{یعنی } < \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) \frac{1}{3}$$

پس اگر سلسلہ متع ہو تو $\frac{1}{1}$ سلسلہ بھی متع ہوگا۔

۳۰۰۔ دفعہ ۲۸ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر اس نسبت کی انتہا جو کسی سلسلہ کی ن دیں رقم اس کی رقم با قبل سے ساتھ رکھتی ہو ایک سے کم ہو تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے اور اگر یہ نسبت ایک سے زیادہ ہو تو سلسلہ متع ہوتا ہے۔

اس باب کے باقی حصہ میں ہم دیکھنے لگے کہ اس جانچ کے مرادف ہوئے ذیل کو استعمال کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے

اگر کسی سلسلہ کی n دین رقم کی جو نسبت n رقم مالعل کے ساتھ ہے اسکی انتہائی قیمت ایک سے بڑی ہو تو سلسلہ مستحق ہوگا اور اگر یہ نسبت ایک سے کم ہو تو سلسلہ متنع ہوگا۔

یعنی مستحق ہوگا اگر نہا $\frac{ع}{ع+۱} < ۱$ اور متنع ہوگا اگر نہا $\frac{ع}{ع+۱} > ۱$ اسی طرح نے دفعہ ماقبل کا مسئلہ بیان کیا جاسکتا ہے۔

ع سلسلہ مستحق ہوگا اگر n سلسلہ مستحق ہو بشرطیکہ نہا $\frac{ع}{ع+۱} < \frac{ق}{ق+۱}$ اور ع سلسلہ متنع ہوگا اگر n سلسلہ

متنع ہو بشرطیکہ نہا $\frac{ع}{ع+۱} > \frac{ق}{ق+۱}$

۳۰۔ وہ سلسلہ جس کی n دین رقم $ع$ ہے مستحق ہوگا اگر

نہا $\{n - \frac{ع}{ع+۱}\} < ۱$ اور متنع ہوگا اگر نہا $\{n - \frac{ع}{ع+۱}\} > ۱$

اس سلسلہ کا مقابلہ معادن سلسلہ سے کرو جبکی عام رقم $ق$ کا ہے

جب $ق < ۱$ تو معادن سلسلہ مستحق ہوگا، اس صورت میں دیا ہوا

سلسلہ مستحق ہوگا اگر

$$\frac{ع}{ع+۱} < \frac{ق(۱+n)}{ق} \text{ یا } (۱ + \frac{۱}{ق})$$

$$\text{یعنی اگر } \frac{ع}{ع+۱} < ۱ + \frac{ق}{ق} + \frac{ق(۱-ق)}{ق^۲} + \dots$$

$$\text{یا } n - \frac{ع}{ع+۱} < ۱ + \frac{ق(۱-ق)}{ق^۲} + \dots$$

منہا اگر نہا $\{n(1 - \frac{e}{1+e})\} < q$

لیکن مساوی سلسلہ مستحق ہوتا ہے اگر قی ایک سے بقدر ایک محدود مقدار کے جو خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو بڑا ہو، پس مسئلہ ہذا کا پہلا حصہ ثابت ہوا۔ اگر قی > 1 تو معادل سلسلہ متع ہوتا ہے اور حسب سابق ہم مسئلہ کا دوسرا حصہ بھی ثابت کر سکتے ہیں۔
مثال - معلوم کرو کہ سلسلہ

$$+\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{20} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{1}$$

مستحق ہے یا متع۔

یہاں نہا $\frac{e}{1+e} = \frac{1}{4}$ ، اس لئے اگر لا > 1 تو سلسلہ مستحق ہوگا اور اگر لا < 1 تو سلسلہ متع ہوگا۔

اگر لا = 1 تو نہا $\frac{e}{1+e} = 1$ ، اس صورت میں

$$\frac{1}{(1-e)} \times \frac{(3-e)(2-e) \dots \dots \dots \times 3 \times 1}{(2-e)(1-e) \dots \dots \dots \times 2 \times 1} = \frac{e}{1+e}$$

$$\frac{(1+e)(1-e)}{(1-e)(1-e)} = \frac{e}{1+e} \text{ اور}$$

$$n(1 - \frac{e}{1+e}) = \frac{n(1-e)}{(1-e)}$$

$$n(1 - \frac{e}{1+e}) = \frac{1}{2}$$

پس اگر لا = 1 تو بھی سلسلہ بالاستحق ہوگا۔

۳۰۲ - ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جس کی عام رقم عی ہے مستحق یا متع ہوگا۔

اگر بالترتیب ہما (ن لوک $\frac{ع}{۱+ع}$) < یا > ۱
 سلسلہ زیر بحث کا مقابلہ اس سلسلہ سے کرو جس کی عام رقم $\frac{۱}{ن}$ ہے۔
 جب ق < ۱، تو معاون سلسلہ مستحق ہوتا ہے اور اس صورت میں
 سلسلہ زیر بحث مستحق ہوگا اگر

$$\frac{ع}{۱+ع} < (۱ + \frac{۱}{ن}) \dots\dots\dots [دفعہ ۳۰۰]$$

$$\text{یعنی اگر لوک } \frac{ع}{۱+ع} < \text{ق لوک } (۱ + \frac{۱}{ن})$$

$$\text{یا اگر لوک } \frac{ع}{۱+ع} < \frac{ق}{ن} - \frac{ق}{۲ن} + \dots\dots\dots$$

$$\text{یعنی اگر ہما (ن لوک } \frac{ع}{۱+ع}) < \text{ق}$$

پس سلسلہ زیر بحث کا پہلا حصہ ثابت ہوا۔
 اگر ق > ۱ تو بھی ہم اسی طرح عمل کرتے ہیں، اس صورت میں معاون
 سلسلہ متبع ہوتا ہے۔
 مثال۔ معلوم کرو کہ سلسلہ

$$لا + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۴}{۴} + \dots\dots\dots$$

مستحق ہے یا متبع۔

$$\text{یہاں } \frac{ع}{۱+ع} = \frac{ن لا}{ن} \div \frac{(۱+ن) لا^{۱+ن}}{(۱+ن)}$$

$$= \frac{۱}{(۱ + \frac{۱}{ن})} = \frac{ن}{(۱+ن)}$$

∴ ہذا $\frac{ع}{ع+۱} = \frac{۱}{فولا} \dots\dots\dots$ [دفعہ ۲۲۰ نتیجہ صریح]

پس اگر لا $> \frac{۱}{فولا}$ تو سلسلہ مستحق ہے اور اگر لا $< \frac{۱}{فولا}$ تو سلسلہ متنع ہے۔

$$\text{اگر لا} = \frac{۱}{فولا} \text{ تو } \frac{ع}{ع+۱} = \frac{فولا}{ن(۱+\frac{۱}{ن})}$$

$$\text{∴ لوک } \frac{ع}{ع+۱} = \text{لوک فولا} - \text{ن لوک } (۱ + \frac{۱}{ن})$$

$$= ۱ - ن (\frac{۱}{ن} - \frac{۱}{۲ن} + \frac{۱}{۳ن} - \dots\dots\dots)$$

$$= \frac{۱}{ن} - \frac{۱}{۲ن} + \frac{۱}{۳ن} - \dots\dots\dots$$

$$\text{∴ ن لوک } \frac{ع}{ع+۱} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \dots\dots\dots$$

$$\text{∴ ہذا } (ن \text{ لوک } \frac{ع}{ع+۱}) = \frac{۱}{۲}$$

پس اگر لا = $\frac{۱}{فولا}$ تو سلسلہ متنع ہوگا۔

$$\text{۳.۳۔ اگر ہذا } \frac{ع}{ع+۱} = ۱ \text{ اور نیز ہذا } \{ (۱ - \frac{ع}{ع+۱}) \} = ۱ \text{ تو}$$

آزمائش کے طریقے مندرجہ صفحات ۳۳ اور ۳۴ کا رآمد نہیں ہوتے، پس کوئی نیا طریقہ دریافت کرنے کے لئے ہم اس معاون سلسلہ کا استعمال کرتے ہیں جس کی عام رقم $\frac{۱}{ن(لوک ن)}$ ہے، اس سلسلہ کا استدقاق یا تسامع

معلوم کرنے کے لئے ہمیں دفعہ ذیل کے مسئلہ کی ضرورت ہوگی۔
 ۴۰۴۔ اگر n کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے $f(n)$ مثبت رہے
 اور جوں جوں n بڑھتا جائے اس کی قیمت مسلسل کم ہوتی جائے، نیز اگر
 کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ذیل کے دو استناہی سلسلے

$$f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots$$

$$\text{اور } f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots$$

یا دونوں مستحق ہوں گے یا دونوں مستع -

پہلے سلسلہ میں رقوم

$$f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots$$

پر غور کرو جو رقم $f(n)$ کے بعد واقع ہوتی ہیں -

ان رقوم کی تعداد $f(n)$ - یعنی $f(n)$ کے بعد واقع ہوتی ہیں -

رقم $f(n)$ سے بڑی ہے، پس ان رقوم کا حاصل جمع $f(n)$ سے بڑا ہے۔

سے بڑا ہے یعنی $f(n) < f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots$ سے بڑا ہے -
 ک کو بالترتیب قیمتیں $f(n), f(n-1), f(n-2), \dots, f(3), f(2), f(1)$ دینے سے

$$f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots < f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots$$

$$f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots < f(n) + f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots$$

.....

جمع کرنے سے ج - $f(n) < f(n-1) + f(n-2) + \dots + f(3) + f(2) + f(1) + \dots$ ج

جہاں ج اور ج بالترتیب پہلے اور دوسرے سلسلہ کے حاصل جمع کو تعبیر کرتے ہیں، پس اگر دوسرا سلسلہ متسع ہو تو پہلا بھی متسع ہوگا۔
نیز سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم فہ (د) سے کم ہے اور اس لئے اس سلسلہ کا حاصل جمع (۱-۱) فہ (د) سے کم ہے۔

ک کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ... قیمتیں دینے سے

$$\text{فہ (۲)} + \text{فہ (۳)} + \text{فہ (۴)} + \dots + \text{فہ (د)} > (۱-۱) \times \text{فہ (۱)}$$

$$\text{فہ (۱+۱)} + \text{فہ (۲+۱)} + \text{فہ (۳+۱)} + \dots + \text{فہ (د+۱)} > (۱-۱) \times \text{فہ (۲)}$$

.....

اس لئے جمع کرنے سے

$$\text{ج} - \text{فہ (۱)} > (۱-۱) \{ \text{ج} + \text{فہ (۱)} \}$$

پس اگر دوسرا سلسلہ مستدق ہو تو پہلا بھی مستدق ہوگا۔

نوٹ۔ دوسرے سلسلہ کی عام رقم یعنی ن میں رقم معلوم کرنے کے لئے ہم پہلے سلسلہ کی عام رقم یعنی فہ (ن) لیتے ہیں، پھر ن کی بجائے ۱ لکھ کر دے سے ضرب دے دیتے ہیں۔

$$۳.۵ - \text{سلسلہ ۱} + \frac{۱}{۲ (\text{لوک } ۲)} + \frac{۱}{۳ (\text{لوک } ۳)} + \dots + \frac{۱}{ن (\text{لوک } ن)} + \dots$$

مستدق ہوتا ہے اگر ق < ۱ اور متسع ہوتا ہے اگر ق = ۱ یا > ۱
دفعہ ماقبل کی رو سے سلسلہ بالا مستدق ہوگا یا متسع اگر وہ سلسلہ جس کی ن میں رقم

$$\frac{۱}{ن (\text{لوک } ن)} \times \frac{۱}{د (\text{لوک } د)} \text{ یعنی } \frac{۱}{د (\text{لوک } د)} \text{ یعنی } \frac{۱}{ن (\text{لوک } ن)} \times \frac{۱}{د (\text{لوک } د)}$$

ہے ق کی اسی قیمت کے لئے بالترتیب مستدق یا متسع ہو۔

مستقل جزو ضربی $\frac{۱}{د (\text{لوک } د)}$ سب رقموں میں مشترک ہے پس سلسلہ زیر بحث

اور وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{n}$ ہے ق کی ایک ہی قیمت کے لئے دو لوگ مستحق ہوں گے یا دونوں مستحق، پس مطلوبہ نتیجہ دفعہ ۲۹۰ کی رو سے بآسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

۳۰۶۔ وہ سلسلہ جس کی عام رقم $\frac{1}{n}$ ہے مستحق ہوگا یا مستحق اگر بالترتیب

$$[\{ n \} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)] \text{ لوگ } n \text{ یا } > 1$$

سلسلہ زیر بحث کا مقابلہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2 \text{ (لوگ } 2 \text{)}} + \frac{1}{3 \text{ (لوگ } 3 \text{)}} + \dots + \frac{1}{n \text{ (لوگ } n \text{)}} + \dots$$

سے کر دے۔

جب ق < ۱ تو معاون سلسلہ مستحق ہوتا ہے اور اس صورت میں زیر بحث دفعہ ۲۹۹ کی رو سے مستحق ہوگا اگر

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \text{ (لوگ } n \text{) (لوگ } n+1 \text{) (۱) } \dots$$

اب اگر n بہت بڑا ہو تو

$$\text{لوگ } (n+1) = \text{لوگ } n + \text{لوگ } \left(1 + \frac{1}{n} \right) \approx \text{لوگ } n + \frac{1}{n} \text{ تقریباً}$$

پس شرط (۱) ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$$

$$\text{یعنی } n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) < 1 + \frac{ق}{لوکِ n}$$

$$\text{یعنی } \{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \} \text{ لوکِ } n < ق$$

ہذا مسئلہ ہذا کا پہلا حصہ ثابت ہوا، دوسرا حصہ بھی بموجب قاعدہ دفعہ ۳۰،
بآسانی ثابت ہو سکتا ہے۔

$$\text{مثال۔ معلوم کرو کہ سلسلہ } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{11} + \dots$$

سندق ہے یا متع

$$\text{یہاں } \frac{ع_1}{1+ع_1} = \frac{(1+n^2)}{1(n^2)} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots (1)$$

$$n \text{ ہا } \frac{ع_1}{1+ع_1} = 1، \text{ اس لئے ہم مزید جانچ کرتے ہیں}$$

$$(1) \text{ سے } n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) + 1 = \frac{1}{n^2} + \dots (2)$$

$$n \text{ ہا } \{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \} = 1، \text{ اس لئے ہم پھر مزید جانچ کی طرف رجوع کرتے ہیں۔}$$

$$(2) \text{ سے } \{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \} \text{ لوکِ } n = \frac{ق}{لوکِ n}$$

$$n \text{ ہا } \{ n \left(1 - \frac{ع_1}{1+ع_1} \right) - 1 \} \text{ لوکِ } n = 0$$

چونکہ دفعہ ۲۹۵ کی رو سے ہا $\frac{لوکِ n}{n} = 0$ ، اس لئے ثابت ہوا کہ سلسلہ

زیر بحث متع ہے۔

۳۰۷۔ دفعہ ۱۸۳ میں ہم یہ تو بتا چکے ہیں کہ متع سلسلوں کو سلک استدلال میں لانے سے بہت ممکن ہے کہ غلط نتائج مستنبط ہوں لیکن اگر لامتناہی سلسلے مستند بھی ہوں تو بھی ان کو استعمال کرنے میں احتیاط سے کام لینا ضروری ہوتا ہے۔ مثلاً سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{2}} - \dots$$

مستند ہوتا ہے جب $1 = 1$ [دیکھو دفعہ ۲۸۰]
اگر ہم اس سلسلہ کو اسی سلسلہ سے ضرب دیں تو حاصل ضرب میں

$$\dots + \frac{1}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} - \frac{1}{1 - 2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} + \dots$$

اس سر کو لیں سے تعبیر کرو۔ تب چونکہ

$$\frac{1}{2\sqrt{2} - 1} < \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} \text{ یعنی } < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

اس لئے لیں $\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ اور بنا بریں لامتناہی ہے جب 1 لامتناہی ہو
اگر $1 = 1$ تو حاصل ضرب

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \dots - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \dots$$

بن جاتا ہے اور چونکہ رقوم $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ ، لامتناہی ہیں،
اس لئے اس سلسلہ کو کوئی حسابی معنی نہیں دئے جاسکتے۔

اس سے یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ دو لامتناہی مستند سلسلوں کا حاصل ضرب

ہوگی لیکن ج میں وہ سب رقوم شامل ہیں جو اس ماحصل ضرب میں موجود ہیں اور اس کے علاوہ کچھ اور رقیں بھی ہیں، اس لئے

$$ج = لا + ب$$

پس ن کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو ج میں کی قیمت ہمیشہ لا + ب اور لا + ب کی قیمتوں کے درمیان ہوگی۔
فرض کر دو کہ لا اور ب مستحق سلسلے ہیں،

$$لا = لا - لا اور ب = ب - ما$$

کے مساوی رکھو جہاں لا اور ما بالترتیب ان سلسلوں کے ان حصوں کو تعبیر کرتے ہیں جو (ن + ا) رقیں کے لینے کے بعد بچ رہتے ہیں، تب اگر ن لا متناہی ہوگا تو لا اور ما دونوں لا انتہا چھوٹے ہوں گے۔

$$لا + ب = (لا - لا) + (ب - ما) = لا - ب - لا + ما$$

اس لئے لا + ب کی انتہا لا + ب ہے کیونکہ لا اور ب دونوں محدود ہیں اسی طرح لا + ب کی انتہا لا + ب ہے۔

اس لئے ج جو ج میں کی انتہا ہے لازماً لا + ب کے برابر ہوگا

کیونکہ یہ لا + ب اور لا + ب میں کی انتہاؤں کے درمیان واقع ہے۔
اب فرض کر دو کہ لا اور ب کی سب رقوم کی علامتیں یکساں نہیں

اس صورت میں ضروری نہیں کہ لا + ب کی علامت لا + ب کی علامت

درست ہوں اور ہم حسب سابق استدلال نہیں کر سکتے۔
دونوں سلسلوں کی مثبت رقوم کے مجموعہ کو بالترتیب لا + ب سے او

$$..... + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{4} + \frac{4^2}{5} + 1 - 4$$

$$..... + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{4} + \frac{4^2}{5} + 1 - 5$$

$$..... + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{4} + \frac{4^2}{5} + 1 - 6$$

$$+ \frac{(1-2)(1-1)1(1+1)}{2 \times 1} + \frac{(1-1)1}{1} + 1 - 4$$

$$..... + \frac{(1-3)(1-2)(1-1)1(1+1)(1+2)}{2 \times 2 \times 1} +$$

جہاں کوئی کسر واجب ہے۔

$$..... + \frac{(1+3)1}{2} + \frac{(1+2)1}{2} + \frac{1+1}{1} - 8$$

$$+ \frac{1^2}{2} + \frac{(1+2)1}{2} + \frac{(1+1)1}{2} + \frac{1+1}{1} - 9$$

$$+ \frac{(1+3)(1+2)(1+1)1}{2 \times 2 \times 1} +$$

$$..... + \frac{(1+3)1}{2} + \frac{(1+2)1}{2} + \frac{1+1}{1} - 10$$

$$..... + \frac{(1+3)(1+2)(1+1)1}{2 \times 2 \times 1} + \frac{(1+1)1}{2} + 1 + 1 - 11$$

$$..... + \frac{1^2}{2} + \frac{(1+2)1}{2} + \frac{(1+1)1}{2} + \frac{1+1}{1} - 12$$

ک کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تو ثابت کرو کہ سلسلہ $\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots$
مستقل ہوگا اگر ا۔ ا۔ مثبت ہو اور متغیر ہوگا اگر ا۔ ا۔ منفی ہو یا صفر کے مساوی ہو۔

بائیسواں باب

نامعلوم سر

ایلی منطری الجبر کی دفعہ ۲۳۰ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر لا کے کسی منطق صحیح تفاعل میں لا = ۔ رکھنے سے تفاعل مذکور صفر ہو جائے تو یہ تفاعل لا پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔ [علاوہ ازیں دیکھو دفعہ ۵۱ نتیجہ صیح] فرض کرو کہ

$$ق لا + ق لا^{۱-۳} + ق لا^{۲-۳} + + ق$$

لا میں فن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے جو معدوم ہو جاتا ہے جبکہ لا ذیل کی غیر مساوی مقادیر میں سے کسی ایک کے مساوی ہو

مذکورہ بالا تفاعل کو فن (لا) سے تغیر کرو، تب چونکہ فن (لا) لا پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اس لئے

$$ف (لا) = (لا - ل) \{ ق لا^{۱-۳} + + ق \}$$

جہاں حاجی قسمت (لا - ل) ابعاد کا ایک جملہ ہے۔ اسی طرح سے چونکہ فن (لا) لا - ل پر بھی پورا تقسیم ہو جاتا ہے اس لئے

$$ق لا^{۱-۳} + + ق (لا - ل) (ق لا^{۲-۳} +)$$

جہاں غایج قسمت (ن - ۲) ابعاد کا ایک جملہ ہے، اور

$$Q_{n-2}^2 = \dots + (Q_1^2 - Q_2^2) + \dots + Q_n^2$$

.....

اسی طرح ن بار تقسیم کا عمل کرنے سے بالآخر حاصل ہوتا ہے:

ف (لا) = قَبْ (لا-يُ) (لا-يُ) (لا-يُ) (لا-يُ) (لا-يُ)

۳۱۔ اگر ن ابعاد کا ایک منطق صحیح تفاعل متغیر کی ن سے زیادہ قیمتوں کے لئے معدوم ہو جائے تو متغیر کی ہر قوت کا سر لازماً صفر ہوگا۔
تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو، جہاں

$$(ن\ لا) = ق\ لا^1 + ق\ لا^2 + \dots + ق\ لا^n$$

نیز فرض کرو کہ ف (لا) صفر ہو جاتا ہے جب لا نیل کی غیر مساوی قیمتوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ میں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔

ف (لا) = ق (لا - ل) (لا - ل) (لا - ل) (لا - ل) (لا - ل)

نیز فرض کرو کہ لا کی ایک اور قیمت جس سے f (لا) معدوم ہو جائے ہے l ہے تب چونکہ $f(l) = 0$.

اسے ق₁(1-1) ق₂(1-1) ق₃(1-1)..... ق_n(1-1) =

اس لئے قی = کیونکہ حسب مفروض باقی اجزائے ضربی میں سے کوئی جزو ضربی مقرر نہیں ہے، پس ف (لا) ہو جاتا ہے

ق لا^{١-٥} ق لا^{٢-٥} ق لا^{٣-٥} + + ق

اور $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$

اور یہ لاکھوں سے زیادہ قیمتوں کے لئے باہم مساوی ہو جاتے ہیں،
تب جیل

(ق. ق) لا + (ق. ق) لا^١ + (ق. ق) لا^٢ +

لا کی لک سے زیادہ قیمتوں سے صفر ہو جاتا ہے اور اس کے دفتر قبل
 ل رو سے قی۔ قی۔ =، قی۔ قی۔ =، قی۔ قی۔ =۔

قی - قی = قی۔
پس دونوں جملے متعلق (ایک ہی) ہیں اور اس لئے تغیر کی ہر
قسمت کے لئے باہم مساوی ہیں۔

لہذا اگر دو منطق، نتیجہ تفاعل متماثل شعور پر ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ہم متغیر کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھ سکتے ہیں۔

اس اصول کو ہم نے ایلی منٹری الجبر دفعہ ۲۷ میں بلا ثبوت تسلیم کر لیا تھا۔

نیمتی گھڑیج۔ اگر ایک تفاعل بمقابلہ دوسرے تفاعل کے کم ابعاد کا ہو تو بھی یہ مسئلہ درست رہتا ہے۔ مثلاً اگر

$$Q_1^{(0)} + Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)} + \dots + Q_1^{(n-1)} + Q_1^{(n)}$$
$$= \overset{1}{Q_1} + \overset{2}{Q_2} + \overset{3}{Q_3} + \dots + \overset{n}{Q_n}$$

تو اس صورت میں ہمیں صرف یہ فرض کر لینا چاہئے کہ اوراقِ دولت

پس غ اور ع کے بعد کے تمام سر صفر ہیں، نیز
 $۵۳ = ۱ + ۵۲ = ۲ + ۵۱ = ۳ + ۵۰ = ۴ + ۴۹ = ۵ + ۴۸ = ۶ + ۴۷ = ۷ + ۴۶ = ۸ + ۴۵ = ۹ + ۴۴ = ۱۰ + ۴۳ = ۱۱ + ۴۲ = ۱۲ + ۴۱ = ۱۳ + ۴۰ = ۱۴ + ۳۹ = ۱۵ + ۳۸ = ۱۶ + ۳۷ = ۱۷ + ۳۶ = ۱۸ + ۳۵ = ۱۹ + ۳۴ = ۲۰ + ۳۳ = ۲۱ + ۳۲ = ۲۲ + ۳۱ = ۲۳ + ۳۰ = ۲۴ + ۲۹ = ۲۵ + ۲۸ = ۲۶ + ۲۷ = ۲۷ + ۲۶ = ۲۸ + ۲۵ = ۲۹ + ۲۴ = ۳۰ + ۲۳ = ۳۱ + ۲۲ = ۳۲ + ۲۱ = ۳۳ + ۲۰ = ۳۴ + ۱۹ = ۳۵ + ۱۸ = ۳۶ + ۱۷ = ۳۷ + ۱۶ = ۳۸ + ۱۵ = ۳۹ + ۱۴ = ۴۰ + ۱۳ = ۴۱ + ۱۲ = ۴۲ + ۱۱ = ۴۳ + ۱۰ = ۴۴ + ۹ = ۴۵ + ۸ = ۴۶ + ۷ = ۴۷ + ۶ = ۴۸ + ۵ = ۴۹ + ۴ = ۵۰ + ۳ = ۵۱ + ۲ = ۵۲ + ۱ = ۵۳$

جن سے $۵ = ۱ + ۴ = ۲ + ۳ = ۳ + ۲ = ۴ + ۱$

پس حاصل جمع مطلوبہ $= ۱ + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۳} + \frac{۴}{۳} + \frac{۵}{۳} + \frac{۶}{۳} + \frac{۷}{۳} + \frac{۸}{۳} + \frac{۹}{۳} + \frac{۱۰}{۳} + \frac{۱۱}{۳} + \frac{۱۲}{۳} + \frac{۱۳}{۳} + \frac{۱۴}{۳} + \frac{۱۵}{۳} + \frac{۱۶}{۳} + \frac{۱۷}{۳} + \frac{۱۸}{۳} + \frac{۱۹}{۳} + \frac{۲۰}{۳} + \frac{۲۱}{۳} + \frac{۲۲}{۳} + \frac{۲۳}{۳} + \frac{۲۴}{۳} + \frac{۲۵}{۳} + \frac{۲۶}{۳} + \frac{۲۷}{۳} + \frac{۲۸}{۳} + \frac{۲۹}{۳} + \frac{۳۰}{۳} + \frac{۳۱}{۳} + \frac{۳۲}{۳} + \frac{۳۳}{۳} + \frac{۳۴}{۳} + \frac{۳۵}{۳} + \frac{۳۶}{۳} + \frac{۳۷}{۳} + \frac{۳۸}{۳} + \frac{۳۹}{۳} + \frac{۴۰}{۳} + \frac{۴۱}{۳} + \frac{۴۲}{۳} + \frac{۴۳}{۳} + \frac{۴۴}{۳} + \frac{۴۵}{۳} + \frac{۴۶}{۳} + \frac{۴۷}{۳} + \frac{۴۸}{۳} + \frac{۴۹}{۳} + \frac{۵۰}{۳} + \frac{۵۱}{۳} + \frac{۵۲}{۳} + \frac{۵۳}{۳}$

و کی قیمت معلوم کرنے کے لئے $۱ = ۱$ رکھو
 تب سلسلہ میں صرف ایک ہی بیضہ پہلی رقم رو جاتی ہے، اس طرح
 $۲ = ۱ + ۱$ یعنی $۱ = ۱$

لہذا $۱ \times ۱ + ۲ \times ۲ + ۳ \times ۳ + \dots + ۵۳ \times ۵۳$

$= \frac{۱}{۳} (۱ + ۵۳) (۱ + ۵۳)$

نوٹ۔ اس جواب کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر کسی سلسلہ میں
 ن ہیں رقم ن کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو تو ہم سلسلہ مذکورہ
 حاصل جمع کو ن کے ایک ایسے تفاعل کے مساوی فرض کر سکتے ہیں
 جسکا بعد سلسلہ کی ن ہیں رقم کے بعد سے بقدر ایک کے زیادہ ہو
 مثال ۲۔ معلوم کرو کہ کیا شرائط پوری ہونی چاہئیں کہ

$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۵۳ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۵۳$ پورا تقسیم ہو جائے۔

فرض کرو کہ $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۵۳ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۵۳$
 لہذا کی یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے
 ہیں کہ

ک = ۱، ق = ۱، و = ۱، ک = ۱، ب = ۱، ل = ۱، ک = ۱، ب = ۱، ل = ۱
 آخری مساوات سے ک = $\frac{۱}{۳}$ ، اس قیمت کو دہج کرنے سے

$$\frac{1}{b} + 1 = c \text{ اور } \frac{1}{b} + b = l$$

یعنی $l = b(c-1)$ اور $1 = (l-b)/b$ جو شرائط مطلوبہ ہیں۔

مشکل نمبری ۲۲ (۱)

نامعلوم سروں کے قاعدہ سے ذیل کے سلسلوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

$$1 - 1 + 2 + 5 + 14 + \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}$$

$$2 - 1 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}$$

$$3 - 1 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}$$

$$4 - 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}$$

$$5 - 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \dots \dots \dots \text{ن رقموں تک}$$

۶۔ کیا شرط پوری ہونی چاہیے کہ لاء ۳ ق ۲ د ۲ ل جملہ

لا ۲ لا ۲ کی شکل کے ایک جزو ضربی پر پورا تقسیم ہو جائے۔

۷۔ وہ شرائط معلوم کرو کہ جملہ لا ۲ لا ۲ ب لا ۲ ج لا ۲ د پورا

مکعب ہو۔

۸۔ کیا شرائط پوری ہوں گے لا ۲ لا ۲ ب لا ۲ ج لا ۲ د لا ۲ ن

پورا مربع ہو۔

۹۔ ثابت کرو کہ لا ۲ لا ۲ ب لا ۲ ج لا ۲ د لا ۲ ع لا ۲ ف

پورا مربع ہوگا اگر ب ۲ = ج ۲ د ۲ = ف ۲ اور ع ۲ = ج ۲ ف ۲

۱۰۔ اگر لا ۲ لا ۲ ب لا ۲ ج لا ۲ د جملہ لا ۲ ہا پر پورا تقسیم

ہو کے تو ثابت کرو کہ د = ب ج

۱۱۔ اگر لا ۲ لا ۲ د لا ۲ ج جملہ (لا - ج) پر پورا تقسیم ہو جائے

تو ثابت کرو کہ ل = ۲

۱۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کی مساواتیں متماثل ہیں

$$V_2 = \frac{A(1-b)(1-a)}{(1-b)(1-a)} + \frac{B(1-a)(1-b)}{(1-b)(1-a)} + \frac{C(1-b)(1-a)}{(1-b)(1-a)} \quad (1)$$

$$\frac{(a-b)(a-c)(a-d) + (b-c)(b-d)(b-e) + (c-d)(c-e)(c-f) + (d-e)(d-f)(d-g) + (e-f)(e-g)(e-h) + (f-g)(f-h)(f-i) + (g-h)(g-i)(g-j) + (h-i)(h-j)(h-k) + (i-j)(i-k)(i-l) + (j-k)(j-l)(j-m)}{(a-b)(a-c)(a-d) + (b-c)(b-d)(b-e) + (c-d)(c-e)(c-f) + (d-e)(d-f)(d-g) + (e-f)(e-g)(e-h) + (f-g)(f-h)(f-i) + (g-h)(g-i)(g-j) + (h-i)(h-j)(h-k) + (i-j)(i-k)(i-l) + (j-k)(j-l)(j-m)}$$

$$1 = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-c)(b-a)(c-b)}$$

۱۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ جملہ

اولاً $a + b$ اور $a - b$ کے مربعوں کو ضرب دیں
 چنانچہ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ کی شکل کے دو
 اجزاء ضربی کا حاصل ضرب ہو۔

۱۳۔ اگر $a = l + m$, $m + n = y$, $y = z + u$, $z + v = w$

تے = م + لا + ن + ما + لی اور نیز اگر لا 'ما' ہی کے سب قیمتوں کے لئے یہ مساواتیں درست ہوں جبکہ لا 'ما' ہے اور لا 'ما' ہی کا بالترتیب باہم متبادلہ کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$L + 2m = n = a' + 2l + n' = a' + 2l + m =$$

۱۰۔ اگر ن مقادیر 'و' و 'و'..... و میں سے ن۔ رمقادر
سینہ سے مختلف اجتماع بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ جن اجتماعوں پر

یہ حاصل ضرب مشتمل ہیں ان کا مجموعہ

$$\frac{\frac{1}{4} (1-2) (1-3) (1-4) \dots (1-n)}{(1-1) (1-2) \dots (1-n)}$$

۳۱۳۔ اگر لامتناہی سلسلہ $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ کی ہر ایسی محدود قیمت کے لئے جس سے کہ سلسلہ بالامستحق رہے صفر ہو، تو اس کا ہر ایک سر متماثل طور پر صفر ہوگا۔

سلسلہ بالا کو ج سے اور سلسلہ $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ کو ج سے تعبیر کر دے تب ج = $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ اب حسب مفروض لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ لیکن چونکہ ج مستحق ہے اس لئے ج کسی حدود انتہا سے تجاوز نہیں کر سکتا اس لئے لا کو کافی بڑا لینے سے ہم لا ج کو اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں جتنا کہ چاہیں۔ جس سے بصورت موجودہ ج کی انتہا 1 ہو جاتی ہے۔ لیکن ج ہمیشہ صفر رہتا ہے اس لئے 1 متماثل طور پر صفر کے مساوی ہے۔

رقم 1 کو نکال دیتے، لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے لا ج۔

یعنی لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ صفر ہو جاتا ہے۔

اسی طرح سے سلسلہ وار ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ سر $1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ وغیرہ سب متماثل طور پر صفر کے مساوی ہیں۔

۳۱۴۔ اگر دو لامتناہی سلسلے متغیر کی ہر ایسی محدود قیمت کیلئے جس سے یہ سلسلے مستحق رہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوں تو ان سلسلوں میں متغیر کی یکساں قوتوں کے سر باہم مساوی ہونگے۔

اس نئے ن کی ان تمام قوتوں کے لئے جو دو سے بڑی ہیں

$$1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

اگر پہلے تین سر معلوم ہو جائیں تو اس کے بعد مساوات بالا کی مدد سے ہم متواتر سروں کی قیمتیں نکال سکتے ہیں، ان تین سروں کو دریافت کرانے کے لئے ذیل کی مساواتیں بنتی ہیں

$$1 = 1, 2 = 1 + 1, 0 = 1 + 1 - 1 - 1 = 1 = 1$$

$$\text{جن سے } 1 = 1, 2 = 1 - 1, 5 = 1$$

$$\text{نیز } 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \text{ جس سے } 1 = -1$$

$$1 + 1 - 1 - 1 = 0 \text{ جس سے } 1 = 12$$

$$1 + 1 - 1 - 1 = 0 \text{ جس سے } 1 = 16$$

پس $\frac{2 + 1}{1 + 1} = 2 - 2 + 1 + 5 - 1 - 1 + 12 - 1 - 1 + 16 - 1 + \dots$
مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اگر ن اور ر مثبت صحیح اعداد ہوں تو

$$1 - (1 - n) + \frac{n(1 - n)(2 - n)}{2} - \frac{n(1 - n)(2 - n)}{2} + \dots$$

صفر کے مساوی ہوگا اگر ر چھوٹا ہوں سے اور ن کے مساوی ہوگا اگر ر = ن

$$\text{ظاہر ہے کہ } (1 - n) = (1 - n) + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2} + \dots$$

$$۱ل + ب ق^۱ =۔ جس سے ل =۔ \frac{ب}{ق^۱}$$

$$۱ر + ۲ب ق^۱ ل + ج ق^۱ =۔ جس سے ر = \frac{۲ب^۱}{ق^۱} - \frac{ج}{ق^۱}$$

$$پس لا = \frac{ما}{ق^۱} - \frac{ب ما}{ق^۱} + \frac{(۲ب^۱ - ل ج) ما}{ق^۱} + \dots$$

سلسلوں کی تخلیق کی ایک مثال ہے۔
نتیجہ صریح۔ مانگے لئے جو سلسلہ اوپر دیا گیا ہے اگر اس کی شکل حسب ذیل ہو

$$ما = ک + ۱لا + ب لا + ج لا + \dots$$

تو رکھو ما - ک = می

$$تب می = ۱لا + ب لا + ج لا + \dots جس سے لا کو می$$

کی یعنی (ما - ک) کی صعودی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ب)

ذیل کے جملات کو لا کی صعودی قوتوں میں لا والی رقم تک پھیلاؤ

$$\frac{۱ - لا}{۱ - لا - لا - لا} \quad (۲)$$

$$۱ - \frac{۱ + ۲ لا}{۱ - لا - لا - لا}$$

$$۳ - \frac{۱ + لا}{۲ + لا + لا - لا} \quad (۳) \quad \frac{۳ + لا}{۲ - لا - لا - لا} \quad (۴) \quad \frac{۱}{۱ + لا - لا - لا - لا} \quad (۵)$$

۶۔ اگر $\frac{۱ + ب لا}{(۱ - لا)^۲}$ کی تفصیل میں ن ویں رقم (۳ - ن - ۲) لا^{ن-۱} ہو

تو ۱ اور ب کی قیمتیں معلوم کرو۔

۷۔ اگر $\frac{1+2+3+\dots+n}{n}$ کی تفصیل میں n کا سرٹ + اہو تو

$\frac{1+2+3+\dots+n}{n}$ اور $\frac{1+2+3+\dots+n}{n}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۸۔ اگر $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ تو ثابت کرو کہ n کی ایک قیمت

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

۹۔ اگر $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ تو ثابت کرو کہ n کی ایک قیمت

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

اس سے ثابت کرو کہ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ مساوات $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ کا ایک تقریبی حل ہے، نیز بتاؤ کہ یہ جواب اعشاریہ کے کس مقام تک درست ہے۔

۱۰۔ اگر $(1+2+3+\dots+n) > (1+2+3+\dots+n)$ اجزائے ضربی کی تعداد لامتناہی ہو اور $n > 1$ تو ثابت کرو کہ اس میں n کا سر

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

۱۱۔ اگر $n > 1$ تو $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$ کی

تفصیل میں n کا سر دریافت کرو۔

۱۲۔ اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

$$1 = \dots - \frac{1}{(2-n)} - \frac{n(1+n)}{2} + (1-n)(1+n) - \frac{n}{2} \quad (2)$$

جہاں دونوں سلسلوں میں اتحاد رقوم ن ہے اور

$$C_n(1-) = \dots - 3 \times \frac{(1-n)C}{2 \times 1} + 2 \times C - 1 \quad (3)$$

$$(2) (n+q) - n(n+q-1) + \frac{n(n-1)}{2}(n+q-2) - \dots = 0$$

جہاں آخر کے دو سلسلوں میں تعدادِ اقوام (ن + ۱) ہے۔



تیسواں باب

جزوی کسور

۳۱۵۔ ابتدائی جبر و مقابلہ میں بتایا جا چکا ہے کہ اگر ایسی کسروں کا ایک جٹ دیا ہوا ہو جو علامات مثبت اور منفی سے باہم منسلک ہوں تو ان کو ایک سادہ شکل کی واحد کسر میں تحویل کر سکتے ہیں جس کا نسب نما ان کسروں کے نسب نماؤں کے ذواضعاف، نقل کے مساوی ہوتا ہے، بعض اوقات اس عمل کے متضاد عمل کی ضرورت پیش آتی ہے یعنی ایک کسر کو مقابلہ سادہ میں جزوی کسور میں توڑنا پڑتا ہے، مثلاً اگر ہم

کسر $\frac{۳-۵}{۳+۵}$ کو لاکھ صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلانا

چاہیں تو ہم دفعہ ۳۱۴ مشق کا طریقہ استعمال کرنے سے سلسلہ مطلوبہ کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں، لیکن اگر ہم اس سلسلہ کی عام رقم معلوم کرنا چاہیں تو یہ طریقہ کار گریں ہوتا، اس کے

بے نہایت آسان طریقہ یہ ہے کہ کسر مذکور کو دو کسور $\frac{۱}{۳-۱} + \frac{۲}{۳-۱}$ کی معادل شکل میں تحویل کر لیا جائے۔ اب ہم ان دونوں جملوں یعنی (۱- لا) اور (۳- لا) کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلانے

ہیں اور اس بناء پر عام رقم معلوم کر سکتے ہیں۔

۳۱۶۔ باب ہذا میں ہم کسی منطق کسر کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے مسئلہ کی توضیح کے لئے چند مثالیں درج کریں گے، اس مضمون پر زیادہ بسیط اور مفصل بحث کے لئے طالب علم سیریت کے اعلیٰ الجبر کا کورس یا احصائے تکملات کی کتابوں کو ملاحظہ کرے ان کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ

(۱) ہر منطق کسر جزوی کسور کے ایک مجموعہ میں تحلیل کی جاسکتی ہے

(۲) اگر اصلی نسب نامہ کوئی خطی جزو ضربی (لا۔ ب) کی شکل کا

ہو تو اسکے تناظر میں $\frac{ب}{لا۔ ب}$ کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل

ہوتی ہے اور اگر اصلی کسر کے نسب نامہ میں (لا۔ ب) کی شکل کے خطی جزو ضربی کی دوسری قوت واقع ہو تو اس کے جواب میں

$\frac{ب}{لا۔ ب}$ اور $\frac{ب}{لا۔ ب}$ کو شکل کی دو جزوی کسیر حاصل

ہوتی ہیں، اسی طرح اگر (لا۔ ب) تین بار واقع ہو تو ان دو جزوی

کسروں کے علاوہ ایک اور کسر $\frac{ب}{لا۔ ب}$ حاصل ہوتی ہے،

علیٰ ہذا القیاس۔

(۳) اگر اصلی کسر کے نسب نامہ میں درجہ دوم کا ایک جزو ضربی

$\frac{ن + لا + ق}{لا + ن + ق}$ کی شکل کا ہو تو اس کے جواب میں

کی شکل کی ایک جزوی کسر حاصل ہوتی ہے اور اگر ابتدائی کسر کے نسب نامہ میں جزو ضربی $\frac{لا + ن + ق}{لا + ن + ق}$ کی دوسری قوت واقع

ہو تو اس کے علاوہ $\frac{ن + لا + ق}{لا + ن + ق}$ کی شکل کی ایک اور

جبریہ کسر حاصل ہوتی ہے۔ علیٰ ہذا القیاس

یہاں مقادیر اَب، بَ، بْ، نَ، قَ، نَ، قَ

میر سے کوئی مقداہجی لا کا تفاعل نہیں ہے۔
ہم ان نتائج کو ذیل کی مثالوں میں استعمال کریں گے۔

مثال ۱۔ $\frac{5-11}{2+2-1}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

چونکہ نسب نما $2\lambda + 2 = 2(\lambda + 1)$ اس لئے ہم جائزہ طور پر فرض کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ب}}{3-52} + \frac{1}{2+5} = \frac{11-55}{4-5+52}$$

∴ م لا + ن = ا (لا + ب) + ب (لا - ا) (۱)
 اب ہم سروں کو مساوی کرنے سے ا اور ب کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں لیکن حسب ذیل طریق پر عمل کرنا زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ چونکہ ا اور ب لا کے تابع نہیں ہیں اس لئے ہم لا کو جو قیمت چاہیں دے سکتے ہیں

(۱) میں رکھو لا - ا = ۰ یعنی لا = ا تب

$$\frac{م لا + ن}{ا + ب} = ا$$

اب رکھو لا + ب = ۰ یعنی لا = - ب تب

$$\frac{م ب - ن}{ا + ب} = ب$$

$$\frac{م لا + ن}{(لا - ا)(لا + ب)} = \frac{۱}{ا + ب} = \frac{۱}{(لا - ا) + (لا + ب)}$$

مثال ۳ - $\frac{۲۳ لا - ۱۱ لا^۲}{(۱ - لا)(۳ + لا)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرو۔

$$\frac{۲۳ لا - ۱۱ لا^۲}{(۱ - لا)(۳ + لا)} = \frac{ا}{۱ - لا} + \frac{ب}{۳ + لا} + \frac{ج}{۱ - لا}$$

..... (۱)

$$\frac{۲۳ لا - ۱۱ لا^۲}{(۱ - لا)(۳ + لا)} = \frac{ا}{۱ - لا} + \frac{ب}{۳ + لا} + \frac{ج}{۱ - لا}$$

$$+ \frac{ج}{(۱ - لا)(۳ + لا)}$$

بالترتیب $۱ - لا = ۱ - لا$ ، $۳ + لا = ۳ + لا$ ، $۱ - لا = ۱ - لا$ سے

$$ا = ۱، ب = ۴، ج = -۱$$

$$\frac{1}{3-2} - \frac{2}{2+3} + \frac{1}{1-2} = \frac{11-12}{(2-9)(1-2)}$$

مثال ۴۔ $\frac{2-3+3}{(2-1)^2(2-1)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

$$\frac{ج}{2(2-1)} + \frac{ب}{2-1} + \frac{ا}{2-1} = \frac{2-3+3}{(2-1)^2(2-1)}$$

$$3-3+3=2-1 \Rightarrow 1(2-1) + 2(2-1) + 1(2-1) = 2(2-1)^2$$

$$ا ب ر کھو ۱-۲=۰، تب ۱=۰-۳$$

$$۲-۱=۰، رکھنے سے ج=۰-۲$$

ب کی قیمت معلوم کرنے کے لئے 'ا' سے سروں کو مساوی کرو،
اس طرح

$$۳=۱-۲ ب جس سے ب=۰-۵$$

$$\frac{۲}{2(2-1)} - \frac{۵}{(2-1)۳} - \frac{۱}{(2-1)۳} = \frac{2-3+3}{(2-1)^2(2-1)}$$

مثال ۵۔ $\frac{۱۹-۲۲}{(۳-۱)(۱+۱)}$ کو جزوی کسور میں تحلیل کرو۔

$$\frac{ج}{۲-۱} + \frac{ا+ب}{۱+۱} = \frac{۱۹-۲۲}{(۳-۱)(۱+۱)}$$

$$۱۹-۲۲=۱۹-۲۱ \Rightarrow ۱(۳-۱) + ۲(۱+۱) = ۲(۳-۱)(۱+۱)$$

$$۲-۱=۰، تب ج=۰-۲$$

'ا' کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$۲ = ۱ + ج \text{ اور } ۱ = ۲$$

مطلق رقموں کو مساوی رکھنے سے

$$۲۲ = ۲ - ج + ج اور ب = ۱۱$$

$$\frac{۲}{۲-۱۱} = \frac{۱۱-۱۱}{۱+۱} = \frac{۲۲-۱۹}{(۱+۱)(۲-۱۱)}$$

۳۱۷۔ ذیل کی مثال میں جو حکمت عملی استعمال کی گئی ہے وہ بھی اکثر اوقات مفید ثابت ہوتی ہے۔

مثال۔ $\frac{۹-۱۲+۲۳-۴۸}{(۱+۱)(۲-۱۱)}$ کو اس کی جزوی کسروں میں

تخلیل کرو۔

$$\frac{۹-۱۲+۲۳-۴۸}{(۱+۱)(۲-۱۱)} = \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱۱-۱۲}{(۲-۱۱)(۱+۱)}$$

یہاں ۱ کوئی مستقل مقدار ہے اور ۱۱-۱۲ 'لا کا کوئی تفاعل' ہے اور ان کی قیمتیں معلوم کرنا مقصود ہے۔

$$۹-۱۲+۲۳-۴۸ = ۱(۱+۱) + (۲-۱۱)(۱+۱)$$

فرض کرو کہ لا = ۱، تب ۱ = ۱-۱۱ تب ۱ کی قیمت درج کرنے اور عمل نقل سے

$$(۱+۱)۱ = (۱۱-۲) + ۹-۱۲+۲۳-۴۸$$

$$۱۲+۱۱ = لا + لا + لا + لا$$

$$۱۲+۱۱ = لا (۱+۱)$$

۱۶ + ۳ لا کے متناظر جو جزوی کسور ہیں انہیں معلوم کر نیکیے

لا - ۲ = می رکھو

$$\frac{۲۴ + ۱۲ + ۶ + ۱}{۳(۲-۹)} = \frac{۱۶ + (۲+می)}{۳} = \frac{۱۶ + ۳ لا}{۳(۲-۹)}$$

$$\frac{۲۴}{۳} + \frac{۱۲}{۳} + \frac{۶}{۳} + \frac{۱}{۳} =$$

$$\frac{۲۴}{۳(۲-۹)} + \frac{۱۲}{۳(۲-۹)} + \frac{۶}{۳(۲-۹)} + \frac{۱}{۲-۹} =$$

$$\frac{۶}{۲(۱-۹)} + \frac{۱}{۲-۹} + \frac{۱}{۱+۹} = \frac{۹ لا - ۲۴ لا + ۳۸ لا}{(۱+۹) ۳(۲-۹)}$$

$$\frac{۲۴}{۳(۲-۹)} + \frac{۱۲}{۳(۲-۹)} +$$

۳۱۸ - اب تک جو مثالیں حل کی گئی ہیں ان سب میں شمار کنندہ کا بعد نسب نامہ کے بعد سے کم تھا۔ اگر ایسا نہ ہو تو شمار کنندہ کو نسب نامہ تقسیم کر لینا چاہئے حتیٰ کہ جو باقی حاصل ہو اسکا بعد نسب نامہ کے بعد سے کم ہو۔

مثال - $\frac{۶ لا + ۵ لا - ۴}{۱ لا - ۲ لا - ۳ لا}$ کو اس کی جزوی کسروں میں تحلیل کرو

$$\frac{۴ لا - ۸}{۱ لا - ۲ لا - ۳ لا} + ۳ + لا = \frac{۶ لا + ۵ لا - ۴}{۱ لا - ۲ لا - ۳ لا}$$

$$\frac{۱}{۱-۹} + \frac{۵}{۱+۹} = \frac{۴ لا - ۸}{۱ لا - ۲ لا - ۳ لا}$$

$$\frac{1}{1-2} + \frac{5}{1+2} + 3 + 2 = \frac{2+5+6}{1-2-2}$$

۳۱۹۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ کس طرح جزوی کسور میں تحلیل کرنے سے کسی منطق کسر کو لڑکی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر $\frac{3+2}{(2-1)^2(2-2)}$ کو لڑکی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلا جائے تو تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔
دفعہ ۳۱۶ سکتی مثال ۴ کی رو سے

$$\frac{3+2}{(2-1)^2(2-2)} = -\frac{1}{(2-1)^2} - \frac{5}{(2-2)^2} - \frac{2}{(2-2)^2}$$

$$= -\frac{1}{(2-1)^2} - \frac{5}{(2-2)^2} - \frac{2}{(2-2)^2}$$

$$= -\frac{1}{(2-1)^2} - \frac{5}{(2-2)^2} - \frac{2}{(2-2)^2}$$

پس تفصیل کی عام رقم

$$(-\frac{1}{(2-1)^2} - \frac{5}{(2-2)^2} - \frac{2}{(2-2)^2})$$

مثال ۲۔ $\frac{2+1}{(1+1)(1+1)}$ کو لڑکی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ

اور تفصیل کی عام رقم معلوم کرو۔

$$\frac{2+1}{(1+1)(1+1)} = \frac{1}{(1+1)} + \frac{1}{(1+1)}$$

$$\therefore 2+1 = 1(1+1) + 1(1+1)$$

$$۱ + لا = ۰ \text{ رکھو، تب } ۳ = ۱$$

رقوم مطلق کو مساوی کرنے سے $۷ = ۱ + ج$ جس سے $ج = ۴$
 لا کے سروں کو مساوی کرنے سے $۰ = ۱ + ب$ جس سے $ب = ۳$

$$۵ = \frac{۷ + لا}{(۱ + لا)(۱ + لا)} + \frac{۳}{لا + ۱} = \frac{۴ - ۳}{لا + ۱}$$

$$= ۳(۱ + لا) + (۴ - ۳)(۱ + لا) = ۱$$

$$۳ = \{ ۱ - لا + لا - لا + \dots + (۱ - لا) + لا + \dots \}$$

$$+ (۴ - ۳)(۱ - لا + لا - لا + \dots + (۱ - لا) + لا + \dots)$$

لا کا سر اس طرح معلوم کرو۔

(۱) اگر رجفت ہو تو دوسرے سلسلہ میں لا کا سر $۴(۱ - لا)$ ہے

اس نے تفصیل میں لا کا سر $۴ + ۳(۱ - لا)$ ہے

(۲) اگر ر طاق ہو تو دوسرے سلسلہ میں لا کا سر $۳(۱ - لا)$ ہے

پس تفصیل میں مطلوبہ سر $۳ - ۲(۱ - لا)$ ہے۔

مثلاً نمبری ۲۳

جزوی کسو میں تحلیل کرو۔

$$(۲) \frac{۴۶ + ۱۳ لا}{۱۲ لا - ۱۱ لا - ۱۵}$$

$$(۱) \frac{۷ لا - ۱}{۱ - لا + ۵ لا - ۶ لا}$$

$$(۴) \frac{۱۰ لا - ۱۳ + ۱۳ لا}{(۱ - لا)(۵ لا - ۶ لا)}$$

$$(۳) \frac{۱ + ۳ لا + ۲ لا}{(۱ - لا)(۲ لا - ۱)}$$

$$(5) \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$(6) \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 10}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 3)}$$

$$(7) \frac{2\sqrt{x} - 11\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2 - \sqrt{x} - 5)}$$

$$(8) \frac{5\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)^2}$$

اگر ذیل کے جملات کو \sqrt{x} کی سعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو تفصیل کی عام رقم دریافت کرو

$$(9) \frac{5\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$(10) \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 28 + \sqrt{x} + 11 + 1}$$

$$(11) \frac{2 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$(12) \frac{\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x} + 3}{10 + \sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$(13) \frac{3 + \sqrt{x} - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$(14) \frac{2 + \sqrt{x} + 3 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 2)}$$

$$(15) \frac{1 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$(16) \frac{2 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$(17) \frac{1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$(18) \frac{1 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$

(۲۲) $\frac{2-3}{2(2+2)} \quad (23) \text{ سلاسل ذیل کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو}$

(۱) $\frac{1}{(1+1)(1+1)} + \frac{1}{(1+1)(1+1)} + \frac{1}{(1+1)(1+1)} + \dots$

(۲) $\frac{1}{(1+1)(1+1)} + \frac{1}{(1+1)(1+1)} + \frac{1}{(1+1)(1+1)} + \dots$

(۲۳) ذیل کے لامتناہی سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کرو جبکہ $1 > 1$

(۲۵) اُس سلسلہ کی ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو جسکی قی ویں رقم

$$\frac{1}{(1-1)(1-1)} + \frac{1}{(1-1)(1-1)} + \frac{1}{(1-1)(1-1)} + \dots$$

ہے $\frac{(1+1+1+1)}{(1-1)(1-1)(1-1)(1-1)}$

۲۶۔ ثابت کرو کہ حروف ا، ب، ج اور اُن کی قوتوں سے ن ابعاد کے جو مختلف نتجائش حاصل ضرب بن سکتے ہیں اُن کا مجموعہ

$$\frac{1^2 + (ب-ج) + ب^2 + (ج-ا) + ج^2 + (ا-ب) + (ب-ا) + (ج-ب) + (ا-ج) + (ب-ج) + (ا-ب)}{(ب-ا) + (ج-ب) + (ا-ج) + (ب-ج) + (ا-ب)}$$

ہے -

چوبیسواں باب

متوالی سلسلے

۳۲۰۔ اگر ایک سلسلہ $۶ + ۶ + ۶ + ۶ + ۶ + \dots$ ایسا ہو کہ

اس میں کسی مقررہ رقم سے اس سے بعد کی ہر ایک رقم رقوم ماقبل کی ایک خاص تعداد کو کسی مستقل مقادیر سے بالترتیب ضرب دیکر ان حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہو تو اس کو متوالی سلسلہ کہتے ہیں۔

۳۲۱۔ سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \dots$ میں دوسری رقم کے بعد ہر ایک رقم دو رقوم ماقبل کو بالترتیب مستقلات ۲ اور ۱ سے ضرب دیکر حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے، ان مقادیر کو مستقل اس لئے کہا گیا ہے کیونکہ یہ ان کی ہر قیمت کے لئے وہی رہتی ہیں مثلاً

$$۵ = ۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + (-۱) \times ۴$$

یعنی $۲ \times ۲ = ۴ - ۱ \times ۳$ عام طور پر جب n ایک سے بڑا ہو تو ہر ایک رقم اپنے عین پہلے کی دو رقوم کے ساتھ مساوات

$$۶ = ۲ \times ۴ - ۱ \times ۵$$

$$یا \quad ۶ = ۲ \times ۴ - ۱ \times ۵ + ۱ \times ۵ - ۲ \times ۶ = ۰$$

$$۲ + ۵ + ۱۳ + ۳۵ + ۹۵ + \dots$$

کے ربط کا پیمانہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ربط کا پیمانہ

$$۱ - ۵ + ۱۳ - ۳۵ + ۹۵ - \dots$$

تب ق اور ل کی قیمتیں ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتی ہیں

$$۱۳ - ۵ ق = ۲ ل = ۰ \text{ اور } ۳۵ - ۱۳ ق = ۵ ل =$$

ان سے ق = ۵ اور ل = ۶، پس مطلوبہ ربط کا پیمانہ

$$۱ - ۵ + ۱۳ - ۳۵ + ۹۵ - \dots$$

۳۲۴ = اگر ربط کا پیمانہ ۳ رقوم پر مشتمل ہو تو اس میں دو مستقل مقادیر ق اور ل ہونگی ان دو مقادیر ق اور ل کو معلوم کرنے کے لئے کم از کم دو مساواتیں ہونی چاہئیں۔ پہلی مساوات معلوم کرنے کے لئے ہمیں سلسلہ کی تین رقوم معلوم ہونا ضروری ہے اور دوسری مساوات بنانے کے لئے ان کے علاوہ ایک اور رقم کے معلوم ہونے کی ضرورت ہے، پس ظاہر ہے کہ اگر ہمیں ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنا ہو جو دو مستقل مقادیر پر مشتمل ہو تو ہمیں سلسلہ کی کم از کم چار قیمتیں معلوم ہونی چاہئیں۔

اگر ربط کا پیمانہ ۱ - ۵ + ۱۳ - ۳۵ + ۹۵ ہو تو تین مستقلات

کو معلوم کرنے کے لئے تین مساواتوں کی ضرورت ہے، پہلی مساوات بنانے کے لئے ہمیں سلسلہ کی کم از کم ۴ قیمتیں معلوم ہونی چاہئیں، باقی دو مساواتیں معلوم کرنے کے لئے دو اور قیمتیں معلوم ہونی چاہئیں، پس ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنے کے لئے جس میں ۳ مستقلات ہوں سلسلہ کی کم از کم چھ رقوم کا معلوم ہونا ضروری ہے۔

بالعموم ایک ایسا ربط کا پیمانہ معلوم کرنے کے لئے جو ۳ مستقلات پر

کیونکہ ربط $ل - ق - ل - ل$ کی بدولت $لا$ کی باقی سب قوتوں کے سر صفر ہیں

$$\begin{array}{r} ۱ + (۱ - ق - ل - ل) \\ \hline ۱ - ق - ل - ل \end{array} = ۱$$

پس اس متوالی سلسلہ کا حاصل جمع ایک ایسی کسر ہے جس کا قسب نما ربط کا پیمانہ ہے۔
۳۲۶ - دفعہ ماقبل کے جواب میں اگر دوسری کسر لا انتہا چھوٹی ہو جائے جب ن لا انتہا بڑھ جائے تو رقوم کی لا متناہی تعداد کا حاصل جمع

$$\begin{array}{r} ۱ + (۱ - ق - ل - ل) \\ \hline ۱ - ق - ل - ل \end{array} = ۱$$

اگر ہم اس کسر کو $لا$ کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں بھلائیں جیسا کہ دفعہ ۳۱۴ میں بتایا گیا ہے تو ہم اوپر کے سلسلہ کی جتنی رقمیں چاہیں حاصل کر سکتے ہیں اس بنا پر جملہ

$$\begin{array}{r} ۱ + (۱ - ق - ل - ل) \\ \hline ۱ - ق - ل - ل \end{array}$$

کو سلسلہ بالا کا کوئی تفاعل کہتے ہیں۔
۳۲۷ - دفعہ ۳۲۵ کے نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے

$$1 + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) = \frac{1}{1-1}$$

$$\frac{(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1)}{1-1} +$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگرچہ تکوینی تعامل

$$\frac{1 + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1)}{1-1}$$

ہے ہم سلسلہ بالا کی جتنی رقوم چاہیں حاصل کر سکتے ہیں تاہم اسکو
سلسلہ

کا حقیقی مساوی تصور کرنا اُسی صورت میں روا اور جائز ہو سکتا

$$\frac{(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1)}{1-1}$$

ن کے لامتناہی ہو جانے سے معدوم ہو جائے یعنی اگر سلسلہ متناہی
۳۲۸ = جب تکوینی تعامل کو جزوی طور کے ایک جٹ کی شکل
میں ظاہر کیا جاسکے تو متوالی سلسلہ کی عام رقم آسانی سے معلوم
ہو سکتی ہے، مثلاً فرض کرو کہ تکوینی تعامل کو جزوی طور

$$\frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1}$$

میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، تب عام رقم

$$1 + (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1)$$

$$- (1 + 3 + 5 + \dots + 3^{n-1} + 3^n)$$

$$= \frac{2 + (1 - 3^n) + 3^{n+1}}{2 + 1} - \frac{1 - 3^n}{3 - 1}$$

۲۹۔ اگر متوالی سلسلہ $1 + 1 + 1 + \dots$ کی عام رقم اور n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کے لئے ہمیں $1 + 1 + 1 + \dots + 1$ کا حاصل جمع اور عام رقم معلوم کرنی چاہئے، نتیجہ میں $1 = 1$ رکھنے سے مجموعہ مطلوبہ حاصل ہوگا۔
مثال۔ سلسلہ $1 + 2 + 3 + \dots + 87$ کی عام رقم اور n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ $1 + 2 + 3 + \dots + 87$ کے ربط کا پیمانہ

$$1 - 5 + 9 - 13 + \dots \text{ ہے اور تکوینی تفاعل } \frac{1 + 1}{1 - 5 + 9 - 13}$$

یہ جملہ ذیل کی دو جزوی کسور میں تحلیل ہو سکتا ہے

$$\frac{3}{1 - 5 + 9 - 13} - \frac{4}{1 - 5 + 9 - 13}$$

اگر ان جملوں کو 1 کی صعودی قوتوں کے سلسلہ میں پھیلایا جائے تو عام رقم $(1 \times 3 - 2 \times 3 + 3 \times 3 - 4 \times 3)$ حاصل ہوتی ہے، پس دئے ہوئے سلسلہ کی عام رقم $3 \times 3 - 2 \times 3 + 1 \times 3$ ہے اور n رقموں کا مجموعہ

$$2(1 - 3^n) - 3(1 - 2^n) \text{ ہے۔}$$

۳۳۔ طالب علم کو ہم پھر یاد دلا دینا چاہتے ہیں کہ دفعہ ماقبل کا تکوینی تفاعل سلسلہ

$$1 + 2 + 3 + \dots + 87$$

کا حقیقی معادل تصور نہیں کیا جاسکتا سوائے اس صورت کے جبکہ لا کی قیمت ایسی ہو کہ اس کے لئے سلسلہ بالا مستحق ہو، اس اگر لا = ۱ تو چونکہ سلسلہ صریحاً متع ہو تا ہے اس لئے ٹکوینی تفاعل سلسلہ بالا کا حقیقی معادل نہیں ہو گا۔ لیکن

کی عام رقم لا کے تابع نہیں اور لا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو یہ عام رقم ہمیشہ سلسلہ

میں لا کا سر ہو گی۔ اس لئے ہم اس کو مستحق سلسلہ سمجھ کر اس کی عام رقم حسب معمول معلوم کرتے ہیں اور پھر نتیجہ میں لا = ۱ رکھ دیتے ہیں۔

اشکله نمبری ۲۴

ذیل کے سلسلہ کا ٹکوینی تفاعل اور عام رقم معلوم کرو

(۱) $۱ + ۵ + ۹ + ۱۳ + ۱۷ + \dots$ (۲) $۲ - ۵ + ۱۰ - ۱۷ + ۲۴ + \dots$

(۳) $۲ + ۳ + ۵ + ۹ + ۱۴ + \dots$ (۴) $۴ - ۱۰ + ۱۷ + ۲۴ + \dots$

(۵) $۳ + ۶ + ۱۲ + ۲۱ + ۳۶ + ۴۸ + ۶۴ + ۸۱ + ۹۶ + ۱۲۱ + \dots$

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ن دیں رقم اور ن رقموں کا مجموعہ معلوم کرو

(۶) $۲ + ۵ + ۱۳ + ۳۵ + \dots$ (۷) $۱ + ۶ + ۳۰ + ۸۴ + \dots$

(۸) $۲ + ۴ + ۱۰ + ۲۵ + ۵۱ + ۹۱ + \dots$

(۹) $۱ + ۲ + ۶ + ۱۶ + ۳۶ + ۶۴ + ۱۰۰ + ۱۴۴ + \dots$

(۱۰) $۳ - ۲ + ۰ + ۸ + \dots$

(۱۱) ثابت کرو کہ سلسلے

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

اور $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ متوالی سلسلے ہیں ان کے ربط کا پیمانہ معلوم کرو۔
(۱۲) بتاؤ کہ اگر متوالی سلسلہ

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

کی لا متناہی رقم کا مجموعہ معلوم ہو تو اس سے اسکی ن
رقموں کا حاصل جمع کس طرح نکالا جاسکتا ہے۔
(۱۳) سلسلہ

$$1 - 3 + 9 - 27 + 81 - \dots$$

کی (۲۰) رقم کا حاصل جمع معلوم کرو۔
(۱۴) متوالی سلسلوں

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$\text{اور } 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

کے ربط کے پیمانے بالترتیب $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ اور $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ سے
ہیں ثابت کرو کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم $(1 + 1 + 1 + \dots)$ ہے
ایک متوالی سلسلہ ہے جس کے ربط کا پیمانہ

$$1 + (1 + 1 + 1 + \dots) + (1 + 1 + 1 + \dots) + (1 + 1 + 1 + \dots) + \dots$$

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

ہے۔
(۱۵) اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جس کی ن ویں رقم ایک

دوسرے دے ہوئے متوالی سلسلہ کی ان رقموں کے مجموعہ کے برابر ہو تو بتاؤ کہ یہ سلسلہ بھی متوالی ہو گا جس کے ربط کے پیمانہ میں دے ہوئے سلسلہ کے ربط کے پیمانہ کی نسبت ایک رقم زیادہ ہو گی۔



پچیسواں باب کسور مسلسل

۳۳۱۔ $۱ + \frac{ب}{ج + \frac{د}{ع + \dots}}$ کی شکل کے جلد کو کسر مسلسل

کہتے ہیں، یہاں حروف 'ا'، 'ب'، 'ج'، وغیرہ کسی قسم کی تقادیر تو تعبیر کر سکتے ہیں لیکن فی الحال ہم صرف اسکی

سادہ شکل $۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \dots}}$ پر بحث کرتے ہیں جس میں

'ا'، 'ب'، 'ج'، صرف مثبت صحیح اعداد کو تعبیر کرتے ہیں اس

سلسلہ کو بالعموم زیادہ منقبط شکل $۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \dots}}$ میں

لکھا جاتا ہے۔
۳۳۲۔ اگر خارج قسمتوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، کی تعداد محدود ہو تو

کسر مسلسل ختم کلفاتی ہے اور اگر غیر محدود ہو تو کسر کو لامتناہی

کسر مسلسل کہتے ہیں۔
اگر کسر مسلسل ہو تو سلسلہ کی آخری یعنی سب سے نیچے کی رقم سے شروع ہو کر یکے بعد دیگرے کسور کو مختصر کرتے جاتے سے

بالآخر ہم ایک مختتم کسر کو معمولی کسر کی شکل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔
۳۳۳- ایک مفروضہ کسر کو مسلسل کسر کی شکل میں لادو۔

فرض کرو کہ $\frac{م}{ن}$ ایک دی ہوئی کسر ہے، م کو ن پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ خارج قسمت $ل$ ہے اور باقی قی ہے تب

$$\frac{م}{ن} = ل + \frac{ق}{ن} = ل + \frac{ل}{\frac{ن}{ق}}$$

پھر ن کو ق پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ $ل$ خارج قسمت ہے اور ق باقی ہے، تب

$$\frac{ن}{ق} = ل + \frac{قی}{ق} = ل + \frac{ل}{\frac{ق}{قی}}$$

پھر ق کو قی پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ $ل$ خارج قسمت ہے اور قی باقی ہے، اور علیٰ ہذا القیاس، تب

$$\frac{م}{ن} = ل + \frac{ل}{ل + \frac{ل}{ل + \frac{ل}{ل + \dots}}}$$

اگر م کم ہوں سے تو پہلا خارج قسمت صفر ہوتا ہے اور ہم

اس طرح لکھتے ہیں $\frac{م}{ن} = \frac{ل}{ن}$ اور سب سابق عمل کرتے ہیں

یہ بات قابل غور ہے کہ مذکورہ بالا طریقہ وہی ہے جو م اور ن کا عا د اعظم نکالنے کا ہے، پس اگر م اور ن متوافق ہوں تو ظاہر ہے کہ ہم کبھی نہ کبھی ایک ایسی منسلل پہنچ جائیں گے

جس پر تقسیم کا عمل پورا ہو جائیگا اسلئے ظاہر ہے کہ ہم ہر ایسی کسور کو جس کا شمار کنندہ اور النسب نما دونوں مثبت صحیح اعداد ہوں ایک مختتم مسلسل کسور کی شکل میں لا سکتے ہیں۔

مثال۔ $\frac{251}{802}$ کو مسلسل کسور کی شکل میں لاؤ۔

معمولی قاعدہ کے مطابق ۲۵۱ اور ۸۰۲ کا عاد اعظم معلوم کرو۔

$$\begin{array}{c|c|c|c} 5 & 251 & 802 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 29 & 8 \end{array}$$

اس میں خارج قسمت بالترتیب ۳، ۵، ۸، ۶..... ہیں اسلئے

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{251}{802}$$

۳۳۴۔ کسور مسلسل کے پہلے دوسرے، تیسرے..... خارج قسمت پر بغیر جانے سے جو کسوریں حاصل ہوتی ہیں ان کو بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا..... مستحق کہتے ہیں، دفعہ ۳۲۹ میں معلوم ہو گا کہ یہ وجہ تسمیہ اس امر پر مبنی ہے کہ ہر مستحق کی قیمت اس سے پہلے مستحق کی نسبت مسلسل کسور کی اصلی قیمت کے زیادہ قریب ہوتی ہے۔

۳۳۵۔ ثابت کرو کہ 'مستحق' مسلسل کسور کی اصلی قیمت سے متبادلاً کم اور زیادہ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مسلسل کسور $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \dots$ ہے

پہلا مستحق ۱ ہے جو کسور بالا کی نسبت بہت چھوٹا ہے کیونکہ

کسور کا باقی حصہ $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \dots$ چھوڑ دیا گیا ہے، دوسرا

مستقل $1 + \frac{1}{2}$ ہے جو کسر کی نسبت بڑا ہے کیونکہ نسبت نما
 1 ، اصلی نسب نما $1 + \frac{1}{2}$ کی نسبت بہت چھوٹا ہے
 اسی طرح تیسرا مستقل $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ مقابلہ چھوٹا ہے

کیونکہ $1 + \frac{1}{2}$ مقابلہ بڑا ہے اور علیٰ ہذا القیاس
 اگر کسر مغروضہ کسر واجب ہو تو $1 =$ ، اگر اس صورت میں ہم یہ تسلیم کر لیں کہ پہلا
 مستقل صفر ہے تو ہم نتائج بالا کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کر سکتے ہیں
 جفت رتبہ کے سب مستقل مسلسل کسر سے بڑے ہوتے ہیں
 اور طاق رتبہ کے سب مستقل مسلسل کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں
 ۳۳۶ - متواتر مستقلوں کے بنانے کا کلیہ معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

ہے، تب پہلے تین مستقل، بالترتیب

$$\frac{1}{1}, \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}, \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}}{1 + \frac{1}{2}}$$

ہیں، ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مستقل کا شمار کنندہ دوسرے مستقل
 کے شمار کنندہ کو تیسرے خارج قسمت سے ضرب دیکر حاصل ضرب
 میں پہلا مستقل جمع کرنے سے بن جاتا ہے، اور اس کا نسب نما
 بھی اسی طرح بنتا ہے۔

فرض کرو کہ اسی طرح سے متواتر مستحق بنائے گئے ہیں، اور ان کے شمار کنندے بالترتیب $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ ، ہیں اور تسب $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ، ہیں۔

فرض کرو کہ کھیتہ بالان وین مستحق کے لئے صحیح ہے یعنی فرض کرو کہ

$$ق_1 = ل_1 ق_1 + ل_2 ق_2$$

$$\text{اور } ل_1 = ل_1 ل_1 + ل_2 ل_2$$

($ل_1 + 1$) وین مستحق اور $ل_1$ وین مستحق میں فرق صرف اس قدر ہے کہ آخر الذکر کے خارج قسمت $ل_1$ کی بجائے اول الذکر میں خارج قسمت $ل_1 + 1$ ہے، پس ($ل_1 + 1$) دان مستحق

$$\frac{ق_1 + ق_2 \left(\frac{1}{ل_1 + 1} + ل_2 \right)}{ل_1 + ل_2 \left(\frac{1}{ل_1 + 1} + ل_2 \right)} =$$

$$= \frac{ل_1 + (ل_1 ق_1 + ل_2 ق_2) + ق_2}{ل_1 + (ل_1 ل_1 + ل_2 ل_2) + ل_2} =$$

$$= \frac{ل_1 + ق_1 + ق_2}{ل_1 + ل_1 + ل_2} = \text{حسب مفروض}$$

$$\frac{\text{ک ق}_1 + \text{ق}_2 - \text{ک}}{\text{ک ل}_1 + \text{ل}_2 - \text{ک}}$$

۳۳۸۔ اگر $\frac{\text{ق}_1}{\text{ل}}$ کسی مسلسل کسر کا 'ن' والی مستحق ہو تو

$$\text{ق}_1 - \text{ل} = \text{ق}_1 - \text{ل} = (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1})$$

فرض کرو کہ مسلسل کسر

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

ہے، تب

$$\text{ق}_1 - \text{ل} = \text{ق}_1 - \text{ل} = (\text{ق}_1 - \text{ل}) + (\text{ق}_1 - \text{ل})$$

$$= (\text{ق}_1 - \text{ل}) + (\text{ق}_1 - \text{ل})$$

$$= (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1})$$

$$= (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1})$$

$$= \dots \dots \dots$$

$$= (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + \dots$$

$$\text{لیکن } \text{ق}_1 - \text{ل} = \text{ق}_1 - \text{ل} = (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + \dots$$

$$\text{پس } \text{ق}_1 - \text{ل} = \text{ق}_1 - \text{ل} = (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + (1 - \frac{\text{ل}}{\text{ق}_1}) + \dots$$

جب سلسل کسر ایک سے کم ہو تو یہ نتیجہ درست رہتا ہے اگر ہم ۱۰ فرض کریں، اور پہلا مستحق بھی صفر ہو۔
نوٹ۔ جب ہم متواتر مستحقوں کی عددی قیمتیں نکال رہے ہوں تو متذکرہ بالا مسئلہ عمل کی صحت کی جانچ کرنے کا ایک سادہ اور آسان ذریعہ ہے۔
نتیجہ صریح۔ ہر ایک مستحق مفرد ترین شکل میں ہوتا ہے کیونکہ اگر ق اور ل میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو

یہ ق ل - ق ل - ق ل یعنی ا کو پورا تقسیم کریگا جو صریحاً ناممکن ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ دو متواتر مستحقوں کا فرق ایک کسر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ ۱ ہوتا ہے، کیونکہ

$$\frac{ق}{ل} - \frac{ق}{ل} = \frac{ق ل - ق ل}{ل ل} = \frac{۱}{ل ل}$$

امثلہ نمبری ۲۵ (۱)

ذیل کے سلسلوں کے متواتر مستحق معلوم کرو۔

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۶}$$

$$۲ - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲}$$

$$۳ - \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳}$$

ذیل کی مقداروں کو مسلسل کسور کی شکل میں لاؤ اور ہر ایک کا چوتھا مستحق معلوم کرو۔

$$\frac{1189}{3924} - 4 \quad \frac{832}{159} - 5 \quad \frac{253}{149} - 4$$

$$\frac{15139}{15139} - 9 \quad 534 - 8 \quad \frac{629}{2318} - 6$$

۱۰۔ $\frac{63.29}{11} - 11$ ایک میٹر $39, 34.04$ انچ کے مساوی ہوتا ہے، مسلسل کسور کے نظریہ سے ثابت کرو کہ 32 میٹر تقریباً 35 انچ کے مساوی ہونگے۔

۱۱۔ کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو 27227 کی جانب متقیق ہو، یہ کسر اعشاریہ 365 دنوں پر شمسی سال کی زیادتی کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۲۔ ایک کلومیٹر تقریباً 62138 میل کے مساوی ہوتا ہے، ثابت کرو کہ کسور $\frac{5}{8}, \frac{18}{29}, \frac{23}{34}, \frac{62}{103}$ اس نسبت کی جو ایک کلومیٹر کو ایک میل کے ساتھ ہے متواتر مستحق قیمتیں ہیں۔

۱۳۔ مساوی طول کی دو پٹریاں بالترتیب 142 اور 209 برابر حصوں میں تقسیم کی گئی ہیں اگر ان کے صفر کے نشان ایک دوسرے پر منطبق ہوں تو بتاؤ کہ ایک کا 3 واں نشان دوسرے کے 4 ویں نشان پر تقریباً منطبق ہوگا۔

۱۴۔ اگر $\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + n + 1}$ کو مسلسل کسریں تبدیل کیا جائے

تو ثابت کرو کہ خارج قسمت متبادلاً $n - 1$ اور $n + 1$ ہونگے، نیز متواتر مستحق معلوم کرو۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ

$$(1) \quad \frac{ق_n}{ل_n} = \frac{ق_{n+1} - ق_{n-1}}{ل_{n+1} - ل_{n-1}}$$

$$(2) \quad \left(1 - \frac{ق_{n-1}}{ل_{n-1}}\right) \left(1 - \frac{ق_{n+1}}{ل_{n+1}}\right) = \left(1 - \frac{ق_n}{ل_n}\right) \left(1 - \frac{ق_{n+2}}{ل_{n+2}}\right)$$

۱۸۔ اگر $\frac{ق_n}{ل_n}$ ایک سلسل کسر کا n واں مستحق ہو اور اسکا
متناظر خارج قسمت $ل$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ق_{n+2}}{ل_{n+2}} - \frac{ق_{n+1}}{ل_{n+1}} = \frac{ق_n}{ل_n} - \frac{ق_{n-1}}{ل_{n-1}} = \frac{ق_{n-2}}{ل_{n-2}} - \frac{ق_{n-3}}{ل_{n-3}} = \dots$$

۲۲۹۔ ہر مستحق اپنے پے کے مستحق کی نسبت سلسل کسر
کی قیمت کے مقابلہ زیادہ قریب ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ سلسل کسر لا ہے اور اس کے تین متواتر مستحق

$$\frac{ق_n}{ل_n}, \frac{ق_{n+1}}{ل_{n+1}}, \frac{ق_{n+2}}{ل_{n+2}}$$

میں فرق صرف اس قدر ہے کہ لایں $ل$ کی بجائے $(ل+۱)$
واں پورا خارج قسمت لیا گیا ہے، اس پورے $ل+۱$ خارج قسمت کو
ک سے تعبیر کرو، تب

$$لا = \frac{ک ق_{n+1} + ق_n}{ک ل_{n+1} + ل_n}$$

$$\frac{ق}{ل} = \frac{ک(ق+ل-ق) = (ق+ل-ق) = (ق+ل-ق)}{ل(ک+ل-ل) = (ک+ل-ل) = (ک+ل-ل)} = \frac{ق}{ل}$$

$$\frac{ق}{ل} = \frac{ق+ل-ق}{ل+ل-ل} = \frac{ق}{ل}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے اور ل چھوٹا ہے ل سے اسلئے
ان دونوں وجوہات کی بناء پر $\frac{ق}{ل}$ اور لا کا فرق چھوٹا

ہے $\frac{ق}{ل}$ اور لا کے فرق سے اس سے ثابت ہوا کہ کسی

سلسل کسر کا ہر ایک مستحق اپنے عین پہلے مستحق کی نسبت
اور بنا برین پہلے مستحقوں میں سے ہر ایک کی نسبت کسر مذکور
کی قیمت کے زیادہ قریب ہوتا ہے۔ دفعہ ہذا کے نتیجہ کو دفعہ
۳۳۵ کے نتیجہ کے ساتھ ملانے سے یہ ظاہر ہے کہ
طاق رتبہ کے مستحق قیمت میں بالمتسل بڑھتے جاتے ہیں
لیکن کسر کی قیمت سے کبھی تجاوز نہیں کر سکتے۔

جست رتبہ سے مستحق قیمت میں بالمتسل کم ہوتے جاتے
ہیں لیکن مسلسل کسر کی قیمت سے کبھی کم نہیں ہوتے۔
۳۳۴۔ کسی مستحق کو مسلسل کسر کے مساوی لینے سے جو غلطی
واقع ہوتی ہے اسکی حدود معلوم کرو۔

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{ق}{ل}, \frac{ق+ل}{ل}, \frac{ق+ل+ل}{ل} \text{ تین مسلسل مستحق}$$

ہیں اور ک پورے (ن + ۲) میں خراج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{تب لا} = \frac{\text{ک قن} + ۱ + \text{قن}}{\text{ک ل} + ۱ + \text{لن}}$$

$$\text{یا لا} = \frac{\text{قن}}{\text{لن}} = \frac{\text{ک}}{\text{ل (ک ل} + ۱ + \text{لن)}} = \frac{۱}{\text{ل (ل (ل} + ۱ + \text{لن)}}$$

اب ک ایک سے بڑا ہے، اس لئے $\frac{\text{قن}}{\text{لن}}$ اور لا کا فرق

$$\frac{۱}{\text{ل (ل} + ۱ + \text{لن)}} \text{ سے کم ہے اور } \frac{۱}{\text{ل (ل (ل} + ۱ + \text{لن)}} \text{ سے بڑا ہے}$$

نیز چونکہ $\text{ل} + ۱ < \text{ل}$ اس لئے $\frac{\text{قن}}{\text{لن}}$ کو لا کی بجائے لینے سے

جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{۱}{\text{ل}^۲}$ سے کم ہے اور $\frac{۱}{\text{ل (ل} + ۱ + \text{لن)}}$ سے

زیادہ ہے۔

۳۴۱۔ دفعہ ماقبل سے یہ ظاہر ہے کہ $\frac{\text{قن}}{\text{لن}}$ کو سلسل

کسر کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے وہ $\frac{۱}{\text{ل (ل} + ۱ + \text{لن)}}$ یا

ل_۱ سے کم ہے یعنی $\frac{۱}{ل_۱ + ل_۲ + ل_۳ + ...}$ سے کم

ہے، پس ل_۱ جتنا بڑا ہوگا اتنا ہی $\frac{ق_۱}{ل_۱}$ کی قیمت مسلسل

کسر کی قیمت کے زیادہ قریب ہوگی۔
پس کسی بڑے خارج قسمت کے عین پہلے کا مستحق مسلسل
کسر کی قیمت بہت قریب ہوتا ہے۔

اب چونکہ غلطی $\frac{۱}{ل_۱}$ سے کم ہے اس لئے ایک ایسا مستحق
معلوم کرنے کے لئے جس کی قیمت اور مسلسل کسر کی قیمت کا باہمی
فرق ایک معلوم مقدار $\frac{۱}{ل_۱}$ سے کم ہو ہیں $\frac{ق_۱}{ل_۱}$ تک متواتر

مستحق نکالنے چاہئیں جہاں ق_۱ بڑا ہے اسے۔

۳۴۲۔ مسلسل کسروں کے خواص کی مدد سے ہم دو ایسے چھوٹے
صحیح اعداد معلوم کر سکتے ہیں جن کی نسبت دو متبائن مقادیر
کی نسبت کے بہت قریب ہو یا دو ایسی مقادیر کی باہمی نسبت
کے بہت قریب ہو جسکی ٹھیک نسبت صرف دو بڑے صحیح عددوں سے تعبیر ہوگی
مثال۔ کسور کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو عدد ۲، ۱۴، ۱۵۹
کی طرف مستحق ہو ۱۴، ۱۵۹ اور ۱۰۰۰۰۰ کا عاذا عظیم
نکالنے کے عمل میں متواتر خارج قسمت ۱، ۱۵، ۱، ۲۵، ۱، ۴۰،
۴ ہیں، تب

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + 3 = 3.12159$$

پس متواتر مستدق

$$\dots\dots\dots \frac{3}{1}, \frac{22}{2}, \frac{333}{104}, \frac{355}{113}$$

ہیں، آخر کا مستدق جو کہ بڑے غلیظ قیمت ۲۵ سے پہلے سے کسر کی قیمت کے نہایت قریب ہے، اس مستدق اور کسر کی قیمت میں

اختلاف $\frac{1}{2(113) \times 25}$ سے کم ہے اور اس لئے $\frac{1}{(100) \times 25}$ سے

یعنی ۴۰۰۰۰ سے کم ہے۔ کوئی مستدق کسی ایسی کسر کی نسبت جس کا نسب غلیظ مستدق کے نسب غلیظ سے کم ہو مسلسل کسر کی قیمت کے زیادہ قریب

ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ مسلسل کسر لا ہے، $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ دو

متصل مستدق ہیں اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ ایک ایسی کسر ہے جس کا نسب غلیظ $\frac{ق}{ل}$ سے کم ہے۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ کسر $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ مستدق $\frac{ق}{ل}$ کی

نسبت لا کے زیادہ قریب ہے تب دفعہ ۳۳۹ کی رو سے $\frac{ق-۱}{ل-۱}$

مستدق $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ کی نسبت بھی لا کے زیادہ قریب ہوگا۔

اور چونکہ لا، $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ کے درمیان واقع ہے اسلئے

لازمًا $\frac{ر}{س}$ کو $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق-۱}{ل-۱}$ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔

اسلئے $\frac{ر}{س} \sim \frac{ق-۱}{ل-۱} > \frac{ق}{ل} \sim \frac{ق-۱}{ل-۱}$ یعنی $\frac{۱}{ل-۱}$

$$: ر ل - ۱ \sim س ق - ۱ > \frac{س}{ل}$$

یعنی ایک صحیح عدد ایک کسر سے کم ہے جو صریحاً ناممکن ہے

لہذا $\frac{ق}{ل}$ ، کسر $\frac{ر}{س}$ کی نسبت مسلسل کسر کے زیادہ قریب ہوگا۔

۳۴۴۔ اگر $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق}{ل}$ کسی مسلسل کسر لا کے دو

متواتر مستق ہوں تو $\frac{ق ق}{ل ل}$ بڑا ہوگا لا سے جب $\frac{ق}{ل}$

بڑا ہو $\frac{ق}{ل}$ سے اور $\frac{ق ق}{ل ل}$ چھوٹا ہوگا لا سے جب $\frac{ق}{ل}$

چھوٹا ہو $\frac{ق}{ل}$ سے۔

فرض کرو کہ $\frac{ق}{ل}$ کے عین بعد جو مستق ہے اس کے

جواب میں مکمل خاج قسمت ک ہے، تب لا = $\frac{ک ق + ق}{ک ل + ل}$

$$\frac{ق ق}{ل ل} - لا = \frac{۱}{ل ل (ک ل + ل)} \{ ق ق (ک ل + ل) \}$$

$$- ل ل (ک ق + ق) \}$$

$$= \frac{(ک ق ل - ق ل) (ق ل - ق ل)}{ل ل (ک ل + ل)}$$

جزو نمبری کا ق ل - ق ل مثبت ہے کیونکہ ق ل < ق ل < ل
اور ک < ل اسلئے $\frac{ق ق}{ل ل} < لا >$ یا اگر بالترتیب ق ل - ق ل

مثبت ہو یا منفی ہو یعنی اگر بالترتیب $\frac{ق}{ل} < لا >$ یا $\frac{ق}{ل}$
بینچہ صریح - اوپر کی تحقیقات سے ظاہر ہے کہ جملات
ق ل - ق ل، ق ق - ل ل، لا، لا، لا، لا، ق ل
کی علامت ایک ہی ہوگی۔

امثلہ نمبری ۲۵ (ب)

(۱) $\frac{۲۲۲}{۲۰۳}$ گزروں کو ایک میٹر کا معادل لینے میں جو غلطی
ہوگی اس کی حدود دیانت کرو، معلوم ہے کہ ایک میٹر = ۱.۰۹۳۶ اگر

(۲) سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۱} + \dots$ کی ایسی
تقریبی قیمت معلوم کرو جس میں اور سلسلہ بالا کی اصلی قیمت
میں اختلاف ۱.۰۰۱ سے کم ہو۔

(۳) مسلسل سلسلوں کے نظریہ کی رو سے ثابت کرو کہ $\frac{۹۹}{۲}$

اور ۱۴۴۱۴۱۴ کا فرق $\frac{1}{11830}$ سے کم ہے۔

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3} \quad (۳)$$

کہ کسور مسلسل کی شکل میں لائو اور تیسرا مستحق معلوم کرو۔
(۵) ثابت کرو کہ پہلے اور ن ویں مستحق کا فرق تعداداً

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots - \frac{1}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}$$

کے مساوی ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ اگر مستحق $\frac{Q_n}{L_n}$ کے جواب میں خارج قسمت
بچ ہو تو

$$\frac{Q_n}{L_n} = \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1-n-1} + \frac{1}{1-n-2} + \dots + \frac{1}{1-n-(n-1)} \quad (۱)$$

$$\frac{L_n}{L_n} = \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1-n-1} + \frac{1}{1-n-2} + \dots + \frac{1}{1-n-(n-1)} \quad (۲)$$

(۷) مسلسل کسر $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$ میں ثابت کرو کہ

$$(۱) \quad Q_n^2 + Q_{n-1}^2 = Q_{n-1} Q_{n+1} + Q_n Q_{n-2} \quad (۱)$$

$$(۲) \quad Q_n^2 = L_{n-1} L_{n+1} \quad (۲)$$

۸۔ اگر $\frac{Q_n}{L_n}$ مسلسل کسر

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \dots$$

کان واں مستحق ہو تو ثابت کرو کہ

$$ل_۲ = ق_۲ + ۱ \text{ اور } ل_۱ = \frac{۱}{ب} + ق_۱$$

۹۔ مسلسل کسر

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

میں ثابت کرو کہ $ق_۲ + ۱ - (۱ + ب) = ق_۱ + ۱ = ۱$

$$\text{اور } ل_۲ + ۱ - (۱ + ب) = ل_۱ + ۱ = ۲$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{۱}{۱+ا} + \frac{۱}{۱+ب} + \frac{۱}{۱+ا} + \dots + ۲ \text{ خارج قسموں تک}$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۱+ا} + \frac{۱}{۱+ب} + \frac{۱}{۱+ا} + \dots + ۲ \text{ خارج قسموں تک}$$

$$۱۱۔ اگر مسلسل کسور $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+a} + \dots$ میں سے پہلی کا ع$$

واں، دوسری کا (ع-۱) واں، تیسری کا

(ع-۲) واں مستحق بالترتیب $\frac{۱}{ب}$ ، $\frac{۱}{ا}$ ، $\frac{۱}{ب}$ ہو تو ثابت کرو کہ

$$م = ل_۱ + ق_۱ = (۱ + ل_۱) + ل_۱$$

۱۲۔ اگر سلسلہ

جہاں a اور b مساوات

$$1 - (a + b) = a^2 + b^2 = 0$$

میں a کی قیمتیں ہیں -



پہلیوں کا باب

درجہ اول کی غیر معین مساواتیں

۳۴۵۔ دسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کس طرح عددی سروں والی غیر معین مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکتے ہیں۔ یہاں ہم درجہ اول کی کسی غیر معین مساوات کے عام حل حاصل کرنے کے لئے مسلسل کسروں کے خواص کو کام میں لائیں گے۔

۳۴۶۔ ہم درجہ اول کی کسی مساوات کو جس میں دو مہمول لا اور ما شامل ہوں $a + b = c$ ج کی شکل میں تبدیل کر سکتے ہیں جہاں a ، b ، c مثبت صحیح اعداد کو تعبیر کرتے ہیں۔ اس مساوات کے بے شمار حل ہو سکتے ہیں لیکن اگر سوال کی شرائط کی رو سے لا، ما مثبت صحیح اعداد ہوں تو ممکن ہے کہ حلوں کی تعداد محدود ہو۔

یہ ظاہر ہے کہ مساوات $a + b = c$ ج کا کوئی حل مثبت صحیح عدد نہیں ہو سکتا، نیز مساوات $a - b = c$ ج وہی ہے جو مساوات $b - a = c$ ج ہے، اس لئے صرف مساوات $a + b = c$ ج پر بحث کرنا کافی ہو گا۔

اگر a اور b میں کوئی جزو ضربی ص ہو اور c میں یہ جزو ضربی شامل نہ ہو تو مساوات $a + b = c$ ج میں سے کوئی

بھی لا، یا کی صحیح عددی قیمت سے پوری نہیں ہوتی کیونکہ $ا + ب = م$ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ج پورا تقسیم نہیں ہوتا۔
 اگر $ا + ب = ج$ میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو تقسیم کرنے سے اسے نکال دیا جاسکتا ہے، پس ہم یہ فرض کرینگے کہ $ا + ب = ج$ میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اور $ا$ اور $ب$ ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔
 $۳۴۳ - مساوات ا - لا - ب = م = ج$ کا عام حل مثبت صحیح اعداد میں دریافت کرو۔

$\frac{ا}{ب}$ کو مسلسل کسر کی شکل میں تحویل کرو اور $\frac{ا}{ب}$ کے عین پہلے مستحق کو $\frac{ق}{ل}$ سے تعبیر کرو تب $ا - ل - ب = ق = ۱$

[دفعہ ۳۳۸]

۱۔ اگر $ا - ل - ب = ق = ۱$ تو مساوات بالا کو ذیل کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$ا - لا - ب = م = ج (ا - ل - ب = ق)$$

$$۱ - (ا - لا - ج ل) = ب (ا - م - ج ق)$$

اب چونکہ $ا$ اور $ب$ میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے اس لئے $ا - لا - ج ل = ب$ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے، پس $ا - لا - ج ل = ب$ جہاں $د$ کوئی صحیح عدد ہے

$$۱ - لا - ج ل = د = \frac{ا - م - ج ق}{ب}$$

یعنی $ا - لا - ج ل = ب + د + ج ل = م = ا + د + ج ق$
 جس سے $د$ کو مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے یا کوئی ایسی منفی صحیح عددی قیمتیں دینے سے جو تعداداً مقادیر

ج ل اور ج ق میں سے چھوٹی مقدار سے کم ہوں مطلوبہ

صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، نیز د صفر کے مساوی ہو سکتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۲۔ اگر $ل = ب + ق = ۱$ تو

$ل = ب + ق = ۱$ (ج ل - ب ق)

$ل = ب + ق = ۱$ (ب ل + ج ق)

$ل = ب + ق = ۱$ (ب ل + ج ق) = $ل + ج ق = ۱$ کوئی صحیح عدد

اس لئے $ل = ب + ق = ۱$ ، $ل = ب + ق = ۱$ ج ق
ان مساواتوں میں د کو کوئی ایسی مثبت صحیح عددی قیمت

دینے سے جو مقادیر ج ل اور ج ق میں سے بڑی مقدار

سے زیادہ ہو مطلوبہ عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں، پس اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔

۳۔ اگر $ل = ب + ق = ۱$ سے کوئی ایک، ا کے مساوی ہو تو

کسر $\frac{ل}{ب}$ کو ایسی مسلسل کسر کی صورت میں تحویل نہیں کیا جاسکتا

جس میں شمار کنندگان 'ا' ہوں اس لئے آگے عمل نہیں کیا جاسکتا

تاہم ان صورتوں میں حل محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں

مثلاً اگر $ب = ۱$ تو مساوات ہو جاتی ہے $ل = ب + ق = ۱$ ج جس سے

$ل = ب + ق = ۱$ ج، اس میں لا کو $\frac{ل}{ب}$ سے بڑی کوئی مثبت

صحیح عددی قیمت دینے سے مطلوبہ حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

نوٹ۔ دیکھنے سے معلوم ہو گا کہ لا اور ما کی قیمتوں کے سلسلے

دو حسابی سلسلے ہیں جن میں مشترک فرق بالترتیب ب اور ا ہیں۔
مثال - مساوات ۲۹ لا - ۴۲ ما = ۵ کا عام حل مثبت صحیح
اعداد میں معلوم کرو۔

$\frac{۴۲}{۲۹}$ کو مسلسل کسریں تحویل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{۴۲}{۲۹}$
کے عین پہلے کا مستند $\frac{۱۳}{۹}$ ہے، پس

$$۱ - = ۹ \times ۴۲ - ۱۳ \times ۲۹$$

$$۵ - = ۴۵ \times ۴۲ - ۶۵ \times ۲۹$$

اس کو اصلی مساوات کے ساتھ ملائے سے

$$(۴۵ + ۶)۴۲ = (۶۵ + ۱۳)۲۹$$

$$\therefore \frac{۴۵ + ۶}{۲۹} = \frac{۶۵ + ۱۳}{۴۲} = \text{د ایک صحیح عدد}$$

پس عام حل ہوا

$$۶۵ - ۲۹ = ۳۶، ۴۵ - ۲۹ = ۱۶$$

۳۴۸ - اگر مساوات لا - ۴۲ ما = ۵ کا ایک حل مثبت صحیح
اعداد میں دیا ہوا ہو تو عام حل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ھ، ک مساوات لا - ۴۲ ما = ۵ کا ایک حل
ہے، تب لا - ھ - ب ک = ج

$$\therefore لا - ۴۲ ما = لا - ھ - ب ک$$

$$\therefore لا - ھ = (لا - ۴۲ ما) + ب ک$$

$$\therefore لا - ھ = \frac{لا - ۴۲ ما + ب ک}{۱} = \text{کوئی صحیح عدد}$$

لہذا لا = ھ + ب د، ما = ک + ا د جو عام حل ہے۔

۳۴۹ - مساوات لا + ۴۲ ما = ۵ کا عام حل مثبت صحیح

اعداد میں معلوم کرو۔

۱۔ کو مسلسل کسر میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ $\frac{1}{b}$ کے

عین پہلے کا مستحق $\frac{c}{a}$ ہے، تب

۱۔ $b \cdot c = a$ اگر ۱۔ $b \cdot c = a$ تو

۱۔ $a + b = c$ (ج ۱۔ $b \cdot c$)

۲۔ $a \cdot c = b$ (ج ۱۔ $a + b$)

۳۔ $a \cdot c = b$ (ج ۱۔ $a + b$)

۴۔ $a \cdot c = b$ (ج ۱۔ $a + b$)

جس سے د کو $\frac{c}{a}$ سے بڑی اور $\frac{a}{b}$ سے چھوٹی مثبت

صحیح عددی قیمتیں دینے سے مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

پس اس صورت میں مطلوبہ حلوں کی تعداد محدود ہوگی اور اگر کوئی صحیح عدد ایسا نہ ہو جو ان شرائط کو پورا کرے تو کوئی حل نہ ہوگا۔

۲۔ اگر ۱۔ $b \cdot c = a$ تو

۱۔ $a + b = c$ (ج ۱۔ $b \cdot c$)

۲۔ $a \cdot c = b$ (ج ۱۔ $a + b$)

۳۔ $a \cdot c = b$ (ج ۱۔ $a + b$)

جس سے د کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے سے

جو $\frac{ج}{ب}$ سے بڑی اور $\frac{ج}{ب}$ سے چھوٹی ہوں مطلوبہ حاصل

صحیح عددوں میں حاصل ہو سکتے ہیں۔ حسب سابق طوں کی
کی تعداد اس صورت میں بھی محدود ہے اور ممکن ہے کہ کوئی
بھی حل نہ ہو۔

۳۔ اگر $ا + ب$ ایک کے مساوی ہو تو دفعہ ۴م کی طرح
حل محض دیکھنے سے معلوم ہو سکتے ہیں۔

۳۵۰۔ اگر مساوات $ا + لا + ب = ما = ج$ کا ایک حل مثبت
صحیح اعداد میں معلوم ہو تو عام حل معلوم کر دو۔
فرض کرو کہ $ا + لا + ب = ما = ج$ کا ایک حل $ص$ ہے،
تب $ا + ص + ب = ک = ج$

$$: لا + ب = ما = ا + ص + ب = ک$$

$$: لا = (ک - ص) = ب (ک - ص)$$

$$: لا = ص = \frac{ک - ما}{ب} = د \quad (\text{صحیح عدد})$$

$$: لا = ص + ب = د + ب = ک = ا + د + ب$$

جو مطلوبہ عام حل ہے۔

۳۵۱۔ معلوم کرو کہ مساوات $ا + لا + ب = ج$ کے مثبت
صحیح عددوں میں کتنے حل ہیں۔

$\frac{ا}{ب}$ کو مسلسل کسر میں تحویل کر دو اور فرض کرو کہ $\frac{ا}{ب}$ کے

عین پہلے کا مستحق $\frac{ق}{ل}$ ہے، تب $ا + ل = ب ق = ۱$

(۱) فرض کرو کہ $ا + ل = ب ق = ۱$ ، تب عام حل ہو گا

لا = ج ل - ب د، ما = د - ج ق [دفعہ ۳۴۹]
 ان مساواتوں میں ذ کو ایسی مثبت صحیح عددی قیمتیں دینے
 سے جو $\frac{ج ل}{ب}$ سے بڑی نہ ہوں اور $\frac{ج ق}{د}$ سے چھوٹی نہ ہوں
 مطلوبہ مثبت صحیح عددی حل حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ اور $\frac{ج}{د}$ صحیح اعداد نہیں ہیں

فرض کرو کہ $\frac{ج ق}{د} = م + ن$ ، $\frac{ج ل}{ب} = ن + گ$ رکھو، پہلا
 م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں اور ف اور گ کسور واجب
 ہیں، تب د کی جو کم سے کم قیمت ہو سکتی ہے وہ م + ا ہے
 اور بڑی سے بڑی قیمت ن ہے
 لہذا حلوں کی تعداد ہے

$$ن - م = \frac{ج ل}{ب} - \frac{ج ق}{د} + ف - گ$$

$$= \frac{ج}{د ب} + ف - گ$$

اب یہ ایک صحیح عدد ہے جو اس صورت میں جب ف بڑا ہو
 گ سے $\frac{ج}{د ب} +$ ایک کسر کی شکل میں اور جب ف چھوٹا
 ہو گ سے تو $\frac{ج}{د ب} -$ ایک کسر کی شکل میں لکھا جاسکتا
 ہے، باغاف دیگر حلوں کی تعداد اس صحیح عدد سے تعبیر ہوتی ہے
 جو $\frac{ج}{د ب}$ کے قریب ترین ہو اور جو اس سے بڑا ہو اگر

ف > گ اور چھوٹا ہو اگر ف > گ

۲۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ کوئی صحیح عدد ہے

اس صورت میں گ =۔ اور لا کی ایک قیمت صفر ہے،

اگر ہم اس کو شامل کر لیں تو حلوں کی تعداد $\frac{ج}{ب} + ن$ ہے

جو لازماً ایک صحیح عدد ہو گا۔ پس اگر ہم صفر والے حل کو شمار میں لائیں تو حلوں کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے

تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{ب} + ۱$ میں شامل ہے اور اگر صفر والے

حل کو شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے

تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{ب}$ میں شامل ہے۔

۳۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ب}$ ایک صحیح عدد ہے

اس صورت میں ف =۔ اور ما کی ایک قیمت صفر ہے، اگر ہم اس کو شامل کر لیں تو د کی کم سے کم قیمت م اور بڑی سے

بڑی قیمت ن ہے، پس حلوں کی تعداد ن۔ م + ۱ یا

$\frac{ج}{ب} - گ + ۱$ ہے، لہذا اگر ہم صفر والے حل کو شمار کریں تو حلوں

کی تعداد اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے تعبیر ہوگی

جو $\frac{ج}{ب} + ۱$ میں شامل ہے اور اگر ہم صفر والے حل کو

شمار میں نہ لائیں تو اس بڑے سے بڑے صحیح عدد سے

تعبیر ہوگی جو $\frac{ج}{ب}$ میں شامل ہے۔

۴۔ فرض کرو کہ $\frac{ج}{ر}$ اور $\frac{ج}{ب}$ دونوں صحیح اعداد ہیں۔
 اس صورت میں $ف =$ اور $گ =$ اور $لا$ اور $ما$ دونوں کی
 ایک ایک قیمت صفر ہے۔ اگر ہم ان کو شمار میں لائیں تو $د$
 کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت $م$ ہو سکتی ہے اور بڑی سے بڑی
 $ن$ ، پس $ن$ کی تعداد $ن - م + ۱$ یا $\frac{ج}{وب} + ۱$ ہے، اگر
 ہم صفروالی قیمتوں کو شمار نہ کریں تو $ن$ کی تعداد $\frac{ج}{وب} - ۱$
 ہے۔
 ۲۔ اگر $ل - ب = ق = ۱$ ، تو عام حل ہے
 $لا = ب + د - ج$ ، $ل = ما = ج - ق - د$
 اور $ما$ نتیجے مستند ہو سکتے ہیں
 ۳۵۲۔ مساوات $لا + ب + ما + ج = می$ کے حل مثبت
 صحیح اعداد میں معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے۔
 عمل نقل سے $لا + ب + ما = ر - ج$ ، $می$ اس میں $می$ کو
 بالتواتر قیمتیں ۱، ۲، ۳، دینے سے ہمیں $لا + ب + ج =$
 کی شکل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن کو حسب سابق حل
 کیا جاسکتا ہے۔
 ۳۵۳۔ اگر ہمارے پاس دو ہمزاد مساواتیں
 $لا + ب + ما + ج = می$
 $لا + ب + ما + ج = می$
 ہوں تو ایک مہول مثلاً $می$ کو ساقط کرنے سے ہمیں
 $لا + ب + ج = ما$ کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے

فرض کرو کہ اس مساوات کا ایک حل $لا = ف$ اور $ما = گ$ ہے،
تب عام حل کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے
 $لا = ف + ب + س$ ، $ما = گ - ل$ میں جہاں س
کوئی صحیح عدد ہے۔

لا اور ما کی یہ قیمتیں اوپر کی مساواتوں میں سے کسی ایک
میں مندرج کرنے سے ہمیں $ف + س + گ = ی = م$ کی
مشکل کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے، فرض کرو کہ اس کا
عام حل یہ ہے

$$س = م + گ - د$$

$$ی = ک - ف - د$$

س کی قیمت مندرج کرنے سے

$$لا = ف + ب + م + ب + گ - د$$

$$ما = گ - ل - م - د - گ - د$$

لا، ما، ی کی قیمتیں، د کو مناسب صحیح عددی قیمتیں دینے
سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۳۵۴۔ اگر معادلات

$$لا + ب + ما + ج = ی = ر اور لا + ب + ما + ج = ی = ر$$

کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم ہو سکے تو عام حل
معلوم کرنے کے لئے یوں عمل کرنا چاہئے۔

فرض کرو کہ $ف = گ + م$ ایک حل ہے، تب

$$لا + ب + گ + ج = م = ر اور لا + ف + ب + گ + ج = م = ر$$

تفریق کرنے سے

$$لا - ف + ب + گ + ج = م - م = ۰$$

$$ل = لا + ف + ب (ما - گ) + ج (ی - م) = .$$

$$\text{ان سے } \frac{لا - ف}{ب - ج} = \frac{ما - گ}{ج - ل} = \frac{ی - م}{ل - ب} = \frac{د}{س}$$

جہاں د ایک صحیح عدد ہے اور ک نسب نماؤں ب ج - ج ب ا ج ل - ج ل اور ل ب - ل ب کے عا د اعظم کو تعبیر کرتا ہے، پس عام حل یہ ہے

$$لا = ف + (ب - ج) \frac{د}{س} ، ما = گ + (ج - ل) \frac{د}{س}$$

$$ی = م + (ل - ب) \frac{د}{س}$$

امثلہ نمبری ۲۶

ذیل کی مساواتوں کا عام حل اور چھوٹے سے چھوٹا مثبت حل صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

$$۱ - ۴۴۵ لا - ۱۱ ما = ۱ \quad ۲ - ۴۵۵ لا - ۵۱۹ ما = ۱$$

$$۳ - ۴۳۶ لا - ۳۹۳ ما = ۵$$

۴ - ۱ پونڈ ۱۹ شنگ ۶ پنس کتنے طریقوں سے فلورنوں اور نصف کراؤنوں میں ادا کئے جاسکتے ہیں۔

۵ - معلوم کرو کہ مساوات $۱۱ لا + ۱۵ ما = ۱۰۳۱$ کے حل مثبت صحیح اعداد میں کتنے ہیں۔

۶ - دو کسیریں معلوم کرو جن کے نسب نما بالترتیب ۷ اور ۹

ہوں اور چٹکا مجموعہ $۱\frac{۱۰}{۶۳}$ کے مساوی ہو۔

۷۔ دو مفرد کسور واجب معلوم کرو جن کے نسب نما بالترتیب ۱۲ اور ۸ ہوں اور جن کا فرق $\frac{1}{24}$ کے مساوی ہو۔
 ۸۔ ایک خاص رقم میں لا پونڈ ما شلنگ ہیں اور یہ رقم ما پونڈ لا شلنگ کا نصف ہے، رقم کی مقدار معلوم کرو۔
 مثبت صحیح اعداد میں حل کرو۔

$$\begin{aligned} 9- \{ 122 &= 5 + 6 + 11 \} & 10- \{ 12 &= 5 + 6 + 11 \} \\ 11- \{ 135 &= 5 + 6 + 11 \} & 12- \{ 103 &= 5 + 6 + 11 \} \\ 13- \{ 38 &= 5 + 6 + 11 \} & 14- \{ 32 &= 5 + 6 + 11 \} \end{aligned}$$

۱۳۔ ۱۳ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۱۲ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۱۱ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۱۰ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۹ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۸ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۷ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۶ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۵ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۴ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۳ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۲ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۱ = ۵ + ۶ + ۱۱، ۰ = ۵ + ۶ + ۱۱۔
 ۱۵۔ اُن تمام مثبت صحیح اعداد کی عام سے عام شکل معلوم کرو کہ اگر اُن کو ۵، ۶، ۸ پر تقسیم کیا جائے تو باقیوں بالترتیب ۳، ۲، ۵، ۶، ۸، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۶۳، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۱، ۱۹۳، ۱۹۵، ۱۹۷، ۱۹۹، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۳۹، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۵، ۲۴۷، ۲۴۹، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۵۹، ۲۶۱، ۲۶۳، ۲۶۵، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۱، ۲۷۳، ۲۷۵، ۲۷۷، ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۳، ۲۸۵، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۱، ۳۰۳، ۳۰۵، ۳۰۷، ۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۱۷، ۳۱۹، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۲۵، ۳۲۷، ۳۲۹، ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۴۵، ۳۴۷، ۳۴۹، ۳۵۱، ۳۵۳، ۳۵۵، ۳۵۷، ۳۵۹، ۳۶۱، ۳۶۳، ۳۶۵، ۳۶۷، ۳۶۹، ۳۷۱، ۳۷۳، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۷۹، ۳۸۱، ۳۸۳، ۳۸۵، ۳۸۷، ۳۸۹، ۳۹۱، ۳۹۳، ۳۹۵، ۳۹۷، ۳۹۹، ۴۰۱، ۴۰۳، ۴۰۵، ۴۰۷، ۴۰۹، ۴۱۱، ۴۱۳، ۴۱۵، ۴۱۷، ۴۱۹، ۴۲۱، ۴۲۳، ۴۲۵، ۴۲۷، ۴۲۹، ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۳۵، ۴۳۷، ۴۳۹، ۴۴۱، ۴۴۳، ۴۴۵، ۴۴۷، ۴۴۹، ۴۵۱، ۴۵۳، ۴۵۵، ۴۵۷، ۴۵۹، ۴۶۱، ۴۶۳، ۴۶۵، ۴۶۷، ۴۶۹، ۴۷۱، ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۷۷، ۴۷۹، ۴۸۱، ۴۸۳، ۴۸۵، ۴۸۷، ۴۸۹، ۴۹۱، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۷، ۴۹۹، ۵۰۱، ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۷، ۵۰۹، ۵۱۱، ۵۱۳، ۵۱۵، ۵۱۷، ۵۱۹، ۵۲۱، ۵۲۳، ۵۲۵، ۵۲۷، ۵۲۹، ۵۳۱، ۵۳۳، ۵۳۵، ۵۳۷، ۵۳۹، ۵۴۱، ۵۴۳، ۵۴۵، ۵۴۷، ۵۴۹، ۵۵۱، ۵۵۳، ۵۵۵، ۵۵۷، ۵۵۹، ۵۶۱، ۵۶۳، ۵۶۵، ۵۶۷، ۵۶۹، ۵۷۱، ۵۷۳، ۵۷۵، ۵۷۷، ۵۷۹، ۵۸۱، ۵۸۳، ۵۸۵، ۵۸۷، ۵۸۹، ۵۹۱، ۵۹۳، ۵۹۵، ۵۹۷، ۵۹۹، ۶۰۱، ۶۰۳، ۶۰۵، ۶۰۷، ۶۰۹، ۶۱۱، ۶۱۳، ۶۱۵، ۶۱۷، ۶۱۹، ۶۲۱، ۶۲۳، ۶۲۵، ۶۲۷، ۶۲۹، ۶۳۱، ۶۳۳، ۶۳۵، ۶۳۷، ۶۳۹، ۶۴۱، ۶۴۳، ۶۴۵، ۶۴۷، ۶۴۹، ۶۵۱، ۶۵۳، ۶۵۵، ۶۵۷، ۶۵۹، ۶۶۱، ۶۶۳، ۶۶۵، ۶۶۷، ۶۶۹، ۶۷۱، ۶۷۳، ۶۷۵، ۶۷۷، ۶۷۹، ۶۸۱، ۶۸۳، ۶۸۵، ۶۸۷، ۶۸۹، ۶۹۱، ۶۹۳، ۶۹۵، ۶۹۷، ۶۹۹، ۷۰۱، ۷۰۳، ۷۰۵، ۷۰۷، ۷۰۹، ۷۱۱، ۷۱۳، ۷۱۵، ۷۱۷، ۷۱۹، ۷۲۱، ۷۲۳، ۷۲۵، ۷۲۷، ۷۲۹، ۷۳۱، ۷۳۳، ۷۳۵، ۷۳۷، ۷۳۹، ۷۴۱، ۷۴۳، ۷۴۵، ۷۴۷، ۷۴۹، ۷۵۱، ۷۵۳، ۷۵۵، ۷۵۷، ۷۵۹، ۷۶۱، ۷۶۳، ۷۶۵، ۷۶۷، ۷۶۹، ۷۷۱، ۷۷۳، ۷۷۵، ۷۷۷، ۷۷۹، ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۷، ۷۸۹، ۷۹۱، ۷۹۳، ۷۹۵، ۷۹۷، ۷۹۹، ۸۰۱، ۸۰۳، ۸۰۵، ۸۰۷، ۸۰۹، ۸۱۱، ۸۱۳، ۸۱۵، ۸۱۷، ۸۱۹، ۸۲۱، ۸۲۳، ۸۲۵، ۸۲۷، ۸۲۹، ۸۳۱، ۸۳۳، ۸۳۵، ۸۳۷، ۸۳۹، ۸۴۱، ۸۴۳، ۸۴۵، ۸۴۷، ۸۴۹، ۸۵۱، ۸۵۳، ۸۵۵، ۸۵۷، ۸۵۹، ۸۶۱، ۸۶۳، ۸۶۵، ۸۶۷، ۸۶۹، ۸۷۱، ۸۷۳، ۸۷۵، ۸۷۷، ۸۷۹، ۸۸۱، ۸۸۳، ۸۸۵، ۸۸۷، ۸۸۹، ۸۹۱، ۸۹۳، ۸۹۵، ۸۹۷، ۸۹۹، ۹۰۱، ۹۰۳، ۹۰۵، ۹۰۷، ۹۰۹، ۹۱۱، ۹۱۳، ۹۱۵، ۹۱۷، ۹۱۹، ۹۲۱، ۹۲۳، ۹۲۵، ۹۲۷، ۹۲۹، ۹۳۱، ۹۳۳، ۹۳۵، ۹۳۷، ۹۳۹، ۹۴۱، ۹۴۳، ۹۴۵، ۹۴۷، ۹۴۹، ۹۵۱، ۹۵۳، ۹۵۵، ۹۵۷، ۹۵۹، ۹۶۱، ۹۶۳، ۹۶۵، ۹۶۷، ۹۶۹، ۹۷۱، ۹۷۳، ۹۷۵، ۹۷۷، ۹۷۹، ۹۸۱، ۹۸۳، ۹۸۵، ۹۸۷، ۹۸۹، ۹۹۱، ۹۹۳، ۹۹۵، ۹۹۷، ۹۹۹، ۱۰۰۱، ۱۰۰۳، ۱۰۰۵، ۱۰۰۷، ۱۰۰۹، ۱۰۱۱، ۱۰۱۳، ۱۰۱۵، ۱۰۱۷، ۱۰۱۹، ۱۰۲۱، ۱۰۲۳، ۱۰۲۵، ۱۰۲۷، ۱۰۲۹، ۱۰۳۱، ۱۰۳۳، ۱۰۳۵، ۱۰۳۷، ۱۰۳۹، ۱۰۴۱، ۱۰۴۳، ۱۰۴۵، ۱۰۴۷، ۱۰۴۹، ۱۰۵۱، ۱۰۵۳، ۱۰۵۵، ۱۰۵۷، ۱۰۵۹، ۱۰۶۱، ۱۰۶۳، ۱۰۶۵، ۱۰۶۷، ۱۰۶۹، ۱۰۷۱، ۱۰۷۳، ۱۰۷۵، ۱۰۷۷، ۱۰۷۹، ۱۰۸۱، ۱۰۸۳، ۱۰۸۵، ۱۰۸۷، ۱۰۸۹، ۱۰۹۱، ۱۰۹۳، ۱۰۹۵، ۱۰۹۷، ۱۰۹۹، ۱۱۰۱، ۱۱۰۳، ۱۱۰۵، ۱۱۰۷، ۱۱۰۹، ۱۱۱۱، ۱۱۱۳، ۱۱۱۵، ۱۱۱۷، ۱۱۱۹، ۱۱۲۱، ۱۱۲۳، ۱۱۲۵، ۱۱۲۷، ۱۱۲۹، ۱۱۳۱، ۱۱۳۳، ۱۱۳۵، ۱۱۳۷، ۱۱۳۹، ۱۱۴۱، ۱۱۴۳، ۱۱۴۵، ۱۱۴۷، ۱۱۴۹، ۱۱۵۱، ۱۱۵۳، ۱۱۵۵، ۱۱۵۷، ۱۱۵۹، ۱۱۶۱، ۱۱۶۳، ۱۱۶۵، ۱۱۶۷، ۱۱۶۹، ۱۱۷۱، ۱۱۷۳، ۱۱۷۵، ۱۱۷۷، ۱۱۷۹، ۱۱۸۱، ۱۱۸۳، ۱۱۸۵، ۱۱۸۷، ۱۱۸۹، ۱۱۹۱، ۱۱۹۳، ۱۱۹۵، ۱۱۹۷، ۱۱۹۹، ۱۲۰۱، ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۰۷، ۱۲۰۹، ۱۲۱۱، ۱۲۱۳، ۱۲۱۵، ۱۲۱۷، ۱۲۱۹، ۱۲۲۱، ۱۲۲۳، ۱۲۲۵، ۱۲۲۷، ۱۲۲۹، ۱۲۳۱، ۱۲۳۳، ۱۲۳۵، ۱۲۳۷، ۱۲۳۹، ۱۲۴۱، ۱۲۴۳، ۱۲۴۵، ۱۲۴۷، ۱۲۴۹، ۱۲۵۱، ۱۲۵۳، ۱۲۵۵، ۱۲۵۷، ۱۲۵۹، ۱۲۶۱، ۱۲۶۳، ۱۲۶۵، ۱۲۶۷، ۱۲۶۹، ۱۲۷۱، ۱۲۷۳، ۱۲۷۵، ۱۲۷۷، ۱۲۷۹، ۱۲۸۱، ۱۲۸۳، ۱۲۸۵، ۱۲۸۷، ۱۲۸۹، ۱۲۹۱، ۱۲۹۳، ۱۲۹۵، ۱۲۹۷، ۱۲۹۹، ۱۳۰۱، ۱۳۰۳، ۱۳۰۵، ۱۳۰۷، ۱۳۰۹، ۱۳۱۱، ۱۳۱۳، ۱۳۱۵، ۱۳۱۷، ۱۳۱۹، ۱۳۲۱، ۱۳۲۳، ۱۳۲۵، ۱۳۲۷، ۱۳۲۹، ۱۳۳۱، ۱۳۳۳، ۱۳۳۵، ۱۳۳۷، ۱۳۳۹، ۱۳۴۱، ۱۳۴۳، ۱۳۴۵، ۱۳۴۷، ۱۳۴۹، ۱۳۵۱، ۱۳۵۳، ۱۳۵۵، ۱۳۵۷، ۱۳۵۹، ۱۳۶۱، ۱۳۶۳، ۱۳۶۵، ۱۳۶۷، ۱۳۶۹، ۱۳۷۱، ۱۳۷۳، ۱۳۷۵، ۱۳۷۷، ۱۳۷۹، ۱۳۸۱، ۱۳۸۳، ۱۳۸۵، ۱۳۸۷، ۱۳۸۹، ۱۳۹۱، ۱۳۹۳، ۱۳۹۵، ۱۳۹۷، ۱۳۹۹، ۱۴۰۱، ۱۴۰۳، ۱۴۰۵، ۱۴۰۷، ۱۴۰۹، ۱۴۱۱، ۱۴۱۳، ۱۴۱۵، ۱۴۱۷، ۱۴۱۹، ۱۴۲۱، ۱۴۲۳، ۱۴۲۵، ۱۴۲۷، ۱۴۲۹، ۱۴۳۱، ۱۴۳۳، ۱۴۳۵، ۱۴۳۷، ۱۴۳۹، ۱۴۴۱، ۱۴۴۳، ۱۴۴۵، ۱۴۴۷، ۱۴۴۹، ۱۴۵۱، ۱۴۵۳، ۱۴۵۵، ۱۴۵۷، ۱۴۵۹، ۱۴۶۱، ۱۴۶۳، ۱۴۶۵، ۱۴۶۷، ۱۴۶۹، ۱۴۷۱، ۱۴۷۳، ۱۴۷۵، ۱۴۷۷، ۱۴۷۹، ۱۴۸۱، ۱۴۸۳، ۱۴۸۵، ۱۴۸۷، ۱۴۸۹، ۱۴۹۱، ۱۴۹۳، ۱۴۹۵، ۱۴۹۷، ۱۴۹۹، ۱۵۰۱، ۱۵۰۳، ۱۵۰۵، ۱۵۰۷، ۱۵۰۹، ۱۵۱۱، ۱۵۱۳، ۱۵۱۵، ۱۵۱۷، ۱۵۱۹، ۱۵۲۱، ۱۵۲۳، ۱۵۲۵، ۱۵۲۷، ۱۵۲۹، ۱۵۳۱، ۱۵۳۳، ۱۵۳۵، ۱۵۳۷، ۱۵۳۹، ۱۵۴۱، ۱۵۴۳، ۱۵۴۵، ۱۵۴۷، ۱۵۴۹، ۱۵۵۱، ۱۵۵۳، ۱۵۵۵، ۱۵۵۷، ۱۵۵۹، ۱۵۶۱، ۱۵۶۳، ۱۵۶۵، ۱۵۶۷، ۱۵۶۹، ۱۵۷۱، ۱۵۷۳، ۱۵۷۵، ۱۵۷۷، ۱۵۷۹، ۱۵۸۱، ۱۵۸۳، ۱۵۸۵، ۱۵۸۷، ۱۵۸۹، ۱۵۹۱، ۱۵۹۳، ۱۵۹۵، ۱۵۹۷، ۱۵۹۹، ۱۶۰۱، ۱۶۰۳، ۱۶۰۵، ۱۶۰۷، ۱۶۰۹، ۱۶۱۱، ۱۶۱۳، ۱۶۱۵، ۱۶۱۷، ۱۶۱۹، ۱۶۲۱، ۱۶۲۳، ۱۶۲۵، ۱۶۲۷، ۱۶۲۹، ۱۶۳۱، ۱۶۳۳، ۱۶۳۵، ۱۶۳۷، ۱۶۳۹، ۱۶۴۱، ۱۶۴۳، ۱۶۴۵، ۱۶۴۷، ۱۶۴۹، ۱۶۵۱، ۱۶۵۳، ۱۶۵۵، ۱۶۵۷، ۱۶۵۹، ۱۶۶۱، ۱۶۶۳، ۱۶۶۵، ۱۶۶۷، ۱۶۶۹، ۱۶۷۱، ۱۶۷۳، ۱۶۷۵، ۱۶۷۷، ۱۶۷۹، ۱۶۸۱، ۱۶۸۳، ۱۶۸۵، ۱۶۸۷، ۱۶۸۹، ۱۶۹۱، ۱۶۹۳، ۱۶۹۵، ۱۶۹۷، ۱۶۹۹، ۱۷۰۱، ۱۷۰۳، ۱۷۰۵، ۱۷۰۷، ۱۷۰۹، ۱۷۱۱، ۱۷۱۳، ۱۷۱۵، ۱۷۱۷، ۱۷۱۹، ۱۷۲۱، ۱۷۲۳، ۱۷۲۵، ۱۷۲۷، ۱۷۲۹، ۱۷۳۱، ۱۷۳۳، ۱۷۳۵، ۱۷۳۷، ۱۷۳۹، ۱۷۴۱، ۱۷۴۳، ۱۷۴۵، ۱۷۴۷، ۱۷۴۹، ۱۷۵۱، ۱۷۵۳، ۱۷۵۵، ۱۷۵۷، ۱۷۵۹، ۱۷۶۱، ۱۷۶۳، ۱۷۶۵، ۱۷۶۷، ۱۷۶۹، ۱۷۷۱، ۱۷۷۳، ۱۷۷۵، ۱۷۷۷، ۱۷۷۹، ۱۷۸۱، ۱۷۸۳، ۱۷۸۵، ۱۷۸۷، ۱۷۸۹، ۱۷۹۱، ۱۷۹۳، ۱۷۹۵، ۱۷۹۷، ۱۷۹۹، ۱۸۰۱، ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، ۱۸۰۷، ۱۸۰۹، ۱۸۱۱، ۱۸۱۳، ۱۸۱۵، ۱۸۱۷، ۱۸۱۹، ۱۸۲۱، ۱۸۲۳، ۱۸۲۵، ۱۸۲۷، ۱۸۲۹، ۱۸۳۱، ۱۸۳۳، ۱۸۳۵، ۱۸۳۷، ۱۸۳۹، ۱۸۴۱، ۱۸۴۳، ۱۸۴۵، ۱۸۴۷، ۱۸۴۹، ۱۸۵۱، ۱۸۵۳، ۱۸۵۵، ۱۸۵۷، ۱۸۵۹، ۱۸۶۱، ۱۸۶۳، ۱۸۶۵، ۱۸۶۷، ۱۸۶۹، ۱۸۷۱، ۱۸۷۳، ۱۸۷۵، ۱۸۷۷، ۱۸۷۹، ۱۸۸۱، ۱۸۸۳، ۱۸۸۵، ۱۸۸۷، ۱۸۸۹، ۱۸۹۱، ۱۸۹۳، ۱۸۹۵، ۱۸۹۷، ۱۸۹۹، ۱۹۰۱، ۱۹۰۳، ۱۹۰۵، ۱۹۰۷، ۱۹۰۹، ۱۹۱۱، ۱۹۱۳، ۱۹۱۵، ۱۹۱۷، ۱۹۱۹، ۱۹۲۱، ۱۹۲۳، ۱۹۲۵، ۱۹۲۷، ۱۹۲۹، ۱۹۳۱، ۱۹۳۳، ۱۹۳۵، ۱۹۳۷، ۱۹۳۹، ۱۹۴۱، ۱۹۴۳، ۱۹۴۵، ۱۹۴۷، ۱۹۴۹، ۱۹۵۱، ۱۹۵۳، ۱۹۵۵، ۱۹۵۷، ۱۹۵۹، ۱۹۶۱، ۱۹۶۳، ۱۹۶۵، ۱۹۶۷، ۱۹۶۹، ۱۹۷۱، ۱۹۷۳، ۱۹۷۵، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۱، ۱۹۸۳، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳، ۱۹۹۵، ۱۹۹۷، ۱۹۹۹، ۲۰۰۱، ۲۰۰۳، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷، ۲۰۰۹، ۲۰۱۱، ۲۰۱۳، ۲۰۱۵، ۲۰۱۷، ۲۰۱۹، ۲۰۲۱، ۲۰۲۳، ۲۰۲۵، ۲۰۲۷، ۲۰۲۹، ۲۰۳۱، ۲۰۳۳، ۲۰۳۵، ۲۰۳۷، ۲۰۳۹، ۲۰۴۱، ۲۰۴۳، ۲۰۴۵، ۲۰۴۷، ۲۰۴۹، ۲۰۵۱، ۲۰۵۳، ۲۰۵۵، ۲۰۵۷، ۲۰۵۹، ۲۰۶۱، ۲۰۶۳، ۲۰۶۵، ۲۰۶۷، ۲۰۶۹، ۲۰۷۱، ۲۰۷۳، ۲۰۷۵، ۲۰۷۷، ۲۰۷۹، ۲۰۸۱، ۲۰۸۳، ۲۰۸۵، ۲۰۸۷، ۲۰۸۹، ۲۰۹۱، ۲۰۹۳، ۲۰۹۵، ۲۰۹۷، ۲۰۹۹، ۲۱۰۱، ۲۱۰۳، ۲۱۰۵، ۲۱۰۷، ۲۱۰۹، ۲۱۱۱، ۲۱۱۳، ۲۱۱۵، ۲۱۱۷، ۲۱۱۹، ۲۱۲۱، ۲۱۲۳، ۲۱۲۵، ۲۱۲۷، ۲۱۲۹، ۲۱۳۱، ۲۱۳۳، ۲۱۳۵، ۲۱۳۷، ۲۱۳۹، ۲۱۴۱، ۲۱۴۳، ۲۱۴۵، ۲۱۴۷، ۲۱۴۹، ۲۱۵۱، ۲۱۵۳، ۲۱۵۵، ۲۱۵۷، ۲۱۵۹، ۲۱۶۱، ۲۱۶۳، ۲۱۶۵، ۲۱۶۷، ۲۱۶۹، ۲۱۷۱، ۲۱۷۳، ۲۱۷۵، ۲۱۷۷، ۲۱۷۹، ۲۱۸۱، ۲۱۸۳، ۲۱۸۵، ۲۱۸۷، ۲۱۸۹، ۲۱۹۱، ۲۱۹۳، ۲۱۹۵، ۲۱۹۷، ۲۱۹۹، ۲۲۰۱، ۲۲۰۳، ۲۲۰۵، ۲۲۰۷، ۲۲۰۹، ۲۲۱۱، ۲۲۱۳، ۲۲۱۵، ۲۲۱۷، ۲۲۱۹، ۲۲۲۱، ۲۲۲۳، ۲۲۲۵، ۲۲۲۷، ۲۲۲۹، ۲۲۳۱، ۲۲۳۳، ۲۲۳۵، ۲۲۳۷، ۲۲۳۹، ۲۲۴۱، ۲۲۴۳، ۲۲۴۵، ۲۲۴۷، ۲۲۴۹، ۲۲۵۱، ۲۲۵۳، ۲۲۵۵، ۲۲۵۷، ۲۲۵۹، ۲۲۶۱، ۲۲۶۳، ۲۲۶۵، ۲۲۶۷، ۲۲۶۹، ۲۲۷۱، ۲۲۷۳، ۲۲۷۵، ۲۲۷۷، ۲۲۷۹، ۲۲۸۱، ۲۲۸۳، ۲۲۸۵، ۲۲۸۷، ۲۲۸۹، ۲۲۹۱، ۲۲۹۳، ۲۲۹۵، ۲۲۹۷، ۲۲۹۹، ۲۳۰۱، ۲۳۰۳، ۲۳۰۵، ۲۳۰۷، ۲۳۰۹، ۲۳۱۱، ۲۳۱۳، ۲۳۱۵، ۲۳۱۷، ۲۳۱۹، ۲۳۲۱، ۲۳۲۳، ۲۳۲۵، ۲۳۲۷، ۲۳۲۹، ۲۳۳۱، ۲۳۳۳، ۲۳۳۵، ۲۳۳۷، ۲۳۳۹، ۲۳۴۱، ۲۳۴۳، ۲۳۴۵، ۲۳۴۷، ۲۳۴۹، ۲۳۵۱، ۲۳۵۳، ۲۳۵۵، ۲۳۵۷، ۲۳۵۹، ۲۳۶۱، ۲۳۶۳، ۲۳۶۵، ۲۳۶۷، ۲۳۶۹، ۲۳۷۱، ۲۳۷۳، ۲۳۷۵، ۲۳۷۷، ۲۳۷۹، ۲۳۸۱، ۲۳۸۳، ۲۳۸۵، ۲۳۸۷، ۲۳۸۹، ۲۳۹۱، ۲۳۹۳، ۲۳۹۵، ۲۳۹۷، ۲۳۹۹، ۲۴۰۱، ۲۴۰۳، ۲۴۰۵، ۲۴۰۷، ۲۴۰۹، ۲۴۱۱، ۲۴۱۳، ۲۴۱۵، ۲۴۱۷، ۲۴۱۹، ۲۴۲۱، ۲۴۲۳، ۲۴۲۵، ۲۴۲۷، ۲۴۲۹، ۲۴۳۱، ۲۴۳۳، ۲۴۳۵، ۲۴۳۷، ۲۴۳۹، ۲۴۴۱، ۲۴۴۳، ۲۴۴۵، ۲۴۴۷، ۲۴۴۹، ۲۴۵۱، ۲۴۵۳، ۲۴۵۵، ۲۴۵۷، ۲۴۵۹، ۲۴۶۱، ۲۴۶۳، ۲۴۶۵، ۲۴۶۷، ۲۴۶۹، ۲۴۷۱، ۲۴۷۳، ۲۴۷۵، ۲۴۷۷، ۲۴۷۹، ۲۴۸۱، ۲۴۸۳، ۲۴۸۵، ۲۴۸۷، ۲۴۸۹، ۲۴۹۱، ۲۴۹۳، ۲۴۹۵، ۲۴۹۷، ۲۴۹۹، ۲۵۰۱، ۲۵۰۳، ۲۵۰۵، ۲۵۰۷، ۲۵۰۹، ۲۵۱۱، ۲۵۱۳، ۲۵۱۵، ۲۵۱۷، ۲۵۱۹، ۲۵۲۱، ۲۵۲۳، ۲۵۲۵، ۲۵۲۷، ۲۵۲۹، ۲

- واقع ہوں گے۔
- ۲۰۔ تین گھنٹے ایک ساتھ بجنا شروع ہوتے ہیں اور بالترتیب ۳۴، ۲۹، ۳۴ سکنڈوں کے وقفوں سے بجتے ہیں، دوسرا اور تیسرا گھنٹہ پہلے گھنٹہ کی نسبت بالترتیب ۲۹ اور ۳۴ سکنڈ زیادہ بجتے ہیں، اگر شب ۲۰ منٹ سے پہلے بجنا بند ہو جائیں تو بتاؤ کہ ہر ایک گھنٹہ کتنی دفعہ بجائے۔
- ۲۱۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو کہ مساوات $4 + 9 = ج$ کے مثبت صحیح اعداد میں پورے چھ حل ہوں۔
- ۲۲۔ ج کی ایسی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو کہ مساوات $4 + 9 + 11 = ج$ کے مثبت صحیح اعداد میں پورے پانچ حل ہوں۔
- ۲۳۔ وہ حدود معلوم کرو جن کے اندر ج کو واقع ہونا چاہیے تاکہ مساوات $4 + 9 + 12 = ج$ کے چھ حل ہوں جبکہ صفروں کے حل شمار میں نہ لائے جائیں۔
- ۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر مساوات $4 + 9 + 12 = ج$ کے مثبت صحیح اعداد میں پورے ن حل ہوں تو ج کی بڑی سے بڑی قیمت $(ن + ۱) + ۱۲ + ۹ + ۴$ ہے اور چھوٹی سے چھوٹی $(ن - ۱) + ۱۲ + ۹ + ۴$ جبکہ صفروں کو شمار میں نہ لایا جائے۔

————— (۱۲) —————

متوالیات

متوالی مسلسل کرو

۳۵۵۔ پچیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مسلسل کسر کو جس کے خارج قسمت ناطق ہوں ایک ایسی معمولی کسر میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح عدد ہوں، اس لحاظ سے یہ کسر غیر ناطق یا اضم مقدار کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ لیکن یہاں ہم ثابت کریں گے کہ درجہ دوم کی مقدار اضم ایک ایسی لامتناہی مسلسل کسریں تحویل ہو سکتی ہے جس کے خارج قسمت متوالی ہوں، پہلے ہم ایک عددی مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال ۱۹۔ کو مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ اور ان کسروں کا ایک ایسا سلسلہ معلوم کرو جو اس کی قیمت کی طرف استقامت کرے۔

$$\frac{3}{2 + \sqrt{19}} + 2 = (2 - \sqrt{19}) + 2 = \sqrt{19}$$

$$\frac{5}{2 + \sqrt{19}} + 2 = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} + 2 = \frac{2 + \sqrt{19}}{3}$$

$$\frac{2}{3 + \sqrt{19}} + 1 = \frac{3 - \sqrt{19}}{5} + 1 = \frac{2 + \sqrt{19}}{5}$$

پہلے سات مستحق جو دفعہ ۳۳۶ کے مطابق بنائے گئے ہیں یہ ہیں

$$\frac{۱۴۲۱}{۳۲۶}، \frac{۱۴۰}{۳۹}، \frac{۶۱}{۱۴}، \frac{۵۸}{۱۱}، \frac{۱۳}{۳}، \frac{۹}{۲}، \frac{۴}{۱}$$

آخری مستحق کو کسر کی بجائے لینے سے غلطی $(\frac{۱}{۳۲۶})$ سے کم ہے

یعنی $(\frac{۱}{۳۲۶})$ سے یا $\frac{۱}{۱۰۲۳۰۰}$ سے کم ہے اور بناءً علیہ

۱..... د سے کم ہے گویا ساتویں مستحق سے اعشاریہ کے کم از کم ۴ درجوں تک درست قیمت حاصل ہوتی ہے۔
۳۵۶۔ ہر دوری کسر مسلسل کی قیمت ایک ایسی ساوا درجہ دوم کی ایک اہل کے ساوی ہوتی ہے جس کے سر ناطق ہوں
مسئل کسر کو لا سے اور دوری حصہ کو ما سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ

$$لا = ا + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} + \dots + \frac{۱}{ھ} + \frac{۱}{و} + \frac{۱}{ز}$$

$$اور ما = م + \frac{۱}{ن} + \frac{۱}{و} + \frac{۱}{ز} + \dots + \frac{۱}{ح} + \frac{۱}{ط}$$

جہاں ا، ب، ج، ھ، ک، م، ن، ...، و، ز مثبت صحیح اعداد ہیں
فرض کرو کہ $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{قی}{لی}$ بالترتیب خارج قسموں ھ، ک کے تناظر
لا کے مستحق ہیں، تب چونکہ ماکمل خارج قسمت ہے اس لئے

$$لا = \frac{ق + ما}{ل + ما} \text{ جس سے } ما = \frac{ق - ل}{ل - لا}$$

فرض کرو کہ $\frac{ر}{س}$ ، $\frac{ری}{سی}$ بالترتیب خارج قسموں ھ، و کے جوا

$\overline{0}V = 11$ $\overline{1}V = 10$ $\overline{2}V = 9$ $\overline{3}V = 8$ $\overline{4}V = 7$

$$\frac{7}{11} \sim 14 \quad \frac{7}{8} \sim 10 \quad \frac{1}{12} \sim 12 \quad \frac{1}{17} \sim 14 \quad \frac{1}{11} \sim 12$$

۱۷۔ $\frac{268}{12}$ کو $\sqrt{12}$ کی بجائے لینے سے جو غلطی واقع ہوتی ہے اس کی حدود معلوم کرو۔

۱۸۔ غلطی کی حدود دریافت کرو جب کہ $\frac{916}{191}$ کو $\frac{23}{2}$ کی

بجائے لیا جائے۔

۱۹۔ آٹا پہلا مستحق معلوم کرو جو اعشاریہ کے پانچویں
مقام تک درست ہو۔

۲۰۔ ۱۵۷ کا پہلا مستحق معلوم کرو جو اعشاریہ کے پانچویں مقام تک درست ہو۔

ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کی مثبت اصل کو مسلسل تسلسل کی شکل میں لاؤ۔

$$-۲۱ - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

۲۳- ۶۷۸-۳۳-

۲۴۔ مساوات لاؤ۔ $5\lambda + 3 = 0$ کی ہر ایک اصل کو مسلسل
کسر کی شکل میں لاؤ۔

۲۵۔ ۲ + $\frac{1}{+4}$ $\frac{1}{+4}$ $\frac{1}{+4}$ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۶۔ $\frac{1}{+3} \frac{1}{+1} \frac{1}{+3} \frac{1}{+1}$ کی قیمت معلوم کرو۔

۲۶۔ ۳ + $\frac{1}{+1}$ $\frac{1}{+2}$ $\frac{1}{+3}$ $\frac{1}{+3}$ $\frac{1}{+2}$ $\frac{1}{+1}$ کی قیمت معلوم

— 2 —

جہاں $\frac{ل}{ل} = \frac{ب}{ب} - \frac{ل}{ل}$ اور $\frac{ل}{ل} = \frac{ث}{ث} - \frac{ل}{ل}$
 علیٰ ہذا القیاس، عام طور پر

$$\frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} - \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} - \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل}$$

جہاں $\frac{ل}{ل} = \frac{ب}{ب} - \frac{ل}{ل} - \frac{ل}{ل} - \frac{ل}{ل}$ اور $\frac{ل}{ل} = \frac{ث}{ث} - \frac{ل}{ل}$

اس لئے $\frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \dots$
 اس طرح سے $\frac{ل}{ل}$ کو ایک لامتناہی سلسلہ کسر کی شکل میں
 تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ ہم ابھی یہ ثابت کریں گے کہ یہ کسر متوالی
 دوروں پر مشتمل ہے، یہ ظاہر ہے کہ نیا دور شروع ہوگا جب
 کوئی مکمل خارج قسمت پہلی دفعہ عود کر کے آئیگا۔
 ہم خارج قسمتوں

$$\frac{ل}{ل} ، \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} ، \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} ، \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} ، \dots$$

کے سلسلہ کو بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے مکمل
 خارج قسمت کے نام سے موسوم کریں گے۔
 ۳۵۸۔ دفعہ ماقبل سے یہ ظاہر ہے کہ مقادیر $\frac{ل}{ل}$ ، $\frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل}$ ،
 سب مثبت صحیح عدد ہیں، اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ مقادیر
 $\frac{ل}{ل}$ ، $\frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل}$ ، $\frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل}$ ، $\frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل}$ ، وغیرہ بھی مثبت صحیح عدد ہیں

فرض کر دو کہ $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{ق}{ل}$ تین متواتر مستحق ہیں

کم ہو گا لاث سے پس ل بڑا نہیں ہو سکتا ل سے لہذا یہ سوال
۱، ۲، ۳، ... ل کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی ل
جو مختلف قیمتیں اختیار کر سکتا ہے ان کی تعداد کبھی ل سے بڑی
نہیں ہو سکتی۔

نیز ل + ۱ = ل ب۔ ل یعنی ل ب = ل + ل + ۱، پس
ل ب ۲ سے بڑا نہیں ہو سکتا، نیز ب ایک مثبت صحیح عدد ہے
اس لئے ل کبھی ۲ سے بڑا نہیں ہو سکتا لہذا ل سوال ۱، ۲، ۳،
... ل کے اور کوئی قیمت اختیار نہیں کر سکتا یعنی ل جو مختلف قیمتیں
اختیار کر سکتا ہے ان کی تعداد کبھی ۲ سے بڑی نہیں ہو سکتی۔
پس مکمل خارج قسمت لاث + ل کی مختلف قیمتوں کی تعداد
کبھی ۲ سے بڑی نہیں ہو سکتی، اس لئے ضرور ہے کہ کوئی
ایک مکمل خارج قسمت اور بناویں اس کے بعد کے تمام خارج
قسمت عود کریں یعنی متوالی ہوں۔

نیز ب، لاث + ل میں کا بڑے سے بڑا صحیح عدد ہے،
پس جزوی خارج قسمت بھی ضرور متوالی ہوں گے۔ اور ہر دور
میں جزوی خارج قسمتوں کو تعداد ۲ ل سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔
۳۶۰۔ ثابت کرو کہ ل > ل + ل

ہم جانتے ہیں کہ ل + ل = ل ب۔ ل۔ ل

ل + ل = ل یا ل < ل۔ ل

چونکہ ل ب۔ ل ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۱۔ لٹ + لٹ < لٹ۔

لیکن ٹ - لٹ = لٹ۔ لٹ۔

۲۔ لٹ - لٹ > لٹ۔

۳۔ لٹ - لٹ > لٹ۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۳۶۱۔ ثابت کرو کہ دور دوسرے جزوی خارج قسمت سے

شروع ہوتا ہے اور پہلے جزوی خارج قسمت سے دُگنے خارج

قسمت پر ختم ہوتا ہے۔

ہم دفعہ ۳۵۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ خارج قسمتوں کا متوالی

ہونا لازمی ہے، اس لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ (ن + ۱) واں

مکمل خارج قسمت (س + ۱) ویں مکمل خارج قسمت پر عود

کر کے آتا ہے یعنی (ن + ۱) واں اور (س + ۱) واں مکمل

خارج قسمت باہم مساوی ہیں، تب

لٹ = لٹ، لٹ = لٹ، لٹ = لٹ

ہم ثابت کر چکے کہ

لٹ = لٹ، لٹ = لٹ، لٹ = لٹ، لٹ = لٹ

ہمیں معلوم ہے کہ

لٹ = لٹ، لٹ = لٹ، لٹ = لٹ، لٹ = لٹ

۱۔ لٹ = لٹ۔

نیز لٹ + لٹ = لٹ، لٹ + لٹ = لٹ، لٹ + لٹ = لٹ

$$= \frac{ب-۱}{ل-۱}$$

$$\frac{ل-۱}{ل-۱} = \frac{ب-۱}{ل-۱} \quad (ب-۱)$$

$$\frac{ل-۱}{ل-۱} = \frac{ب-۱}{ب-۱} = ۱ \quad \text{یا کوئی صحیح عدد}$$

لیکن دفعہ ۳۶۰ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ $\frac{ل-۱}{ل-۱} > \frac{ب-۱}{ب-۱}$ اور $\frac{ل-۱}{ل-۱} > \frac{ب-۱}{ب-۱}$ یعنی $\frac{ل-۱}{ل-۱} > \frac{ب-۱}{ب-۱}$

اس لئے $\frac{ل-۱}{ل-۱} > \frac{ب-۱}{ب-۱}$ پس $\frac{ل-۱}{ل-۱} > \frac{ب-۱}{ب-۱}$ کم ہے ایک سے اس لئے یہ لازماً صفر ہوگا۔

$$\frac{ل-۱}{ل-۱} = \frac{ب-۱}{ب-۱} \quad \text{نیز } \frac{ل-۱}{ل-۱} = \frac{ب-۱}{ب-۱}$$

اس لئے اگر (ن + ۱) واں مکمل خارج قسمت متوالی ہو تو

ن واں مکمل خارج قسمت بھی لازماً متوالی ہوگا، اس لئے

(ن - ۱) واں مکمل خارج قسمت بھی لازماً متوالی ہوگا، علیٰ ہذا

یہ ثبوت برقرار رہتا ہے تا وقتیکہ ن ۲ سے کم نہ ہو جائے

(دیکھو دفعہ ۳۵۸) پس مکمل خارج قسمت دوسرے خارج قسمت $\frac{ل+۱}{ل}$

سے شروع ہو کر متوالی ہوتے ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ

متوالیت دوسرے جزوی خارج قسمت ب سے شروع ہوتی

ہے، اب ہم یہ بتائیں گے کہ یہ جزوی خارج قسمت ۲ پر ختم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{ب_۱ + ث_۱}{ب_۱}$ وہ مکمل خارج قسمت ہے جو دوسرے
مکمل خارج قسمت $\frac{ب_۲ + ث_۲}{ب_۲}$ سے عین پہلے واقع ہوتا ہے
جبکہ سو خزانہ عود کر کے آئے، تب $\frac{ب_۱ + ث_۱}{ب_۱}$ اور $\frac{ب_۲ + ث_۲}{ب_۲}$
دو متواتر مکمل خارج قسمت ہیں، اسلئے

$$ب_۱ + ث_۱ = ب_۲، ب_۱ = ث_۲ - ث_۱$$

$$\text{لیکن } ث_۱ - ث_۲ = ب_۱، \text{ اس لئے } ب_۱ = ۱$$

$$\text{نیز } ب_۱ - ب_۲ = ب_۱، \text{ یعنی } ۱ > ۱، \text{ اسلئے } ب_۱ - ب_۲ = ۱، \text{ یعنی}$$

$$ب_۱ = ۱$$

$$\text{نیز } ب_۱ + ث_۱ = ب_۲، ب_۱ = ب_۲، \text{ اس لئے } ب_۲ = ۲،$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔
۳۶۲۔ ثابت کرو کہ کسی دور میں اول اور آخر سے متساوی ^{الفصل}
جزوی خارج قسمت باہم مساوی ہوتے ہیں جبکہ آخری جزوی
خارج قسمت کو دور میں شمار نہ کیا جائے۔

فرض کرو کہ آخری مکمل خارج قسمت $\frac{ب_۱ + ث_۱}{ب_۱}$ ہے، تب

$$ب_۱ = ۱، ب_۱ = ۱، ب_۲ = ۲،$$

ہم ثابت کرینگے کہ

$$ب_۱ = ۱، ب_۲ = ۱، ب_۳ = ۱، ب_۴ = ۱،$$

اب ہاتھ = $1 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots$
 گویا $\frac{Q_1 + L}{L}$ کے متناظر جزوی خارج قسمت $1 + \frac{1}{b_2}$ ہے، اسلئے

$$\frac{1 + \frac{1}{b_2}}{L} = \frac{Q_1 + L}{L + L}$$

اس منزل پر پورا خارج قسمت ذیل کے دور پر مشتمل ہے

$1 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots$
 اور اس لئے $1 + \frac{1}{b_2}$ کے مساوی ہے، لہذا

$$1 + \frac{1}{b_2} = \frac{Q_1 + L}{L + L}$$

کسوں سے پاک کرنے اور ناطق اور غیر ناطق حصوں کو جداگانہ مساوی کرنے سے

$$1 + \frac{1}{b_2} = \frac{Q_1 + L}{L + L} = \frac{Q_1 + L}{L} \dots (1)$$

$$\text{نیز } \frac{Q_1}{L} \text{ اور } \frac{Q_1 + L}{L} \text{ کی مدد سے}$$

خارج قسمت $1 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots$
 لینے سے جو $1 + \frac{Q_1}{L}$ کے مساوی ہے $\frac{Q_1 + L}{L}$ کی قیمت

مائل ہو سکتی ہے۔

$$\frac{1 + \frac{Q_n}{L_n} (Q_{n-1} + Q_n)}{1 + \frac{Q_n}{L_n} (Q_{n-1} + Q_n)} = \frac{Q_n}{L_n} \text{ پس}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{Q_n}{L_n} \left(\frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} + \frac{Q_n}{L_n} \right) \dots \dots (2)$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ج دیں متوالی دور
میں مابقی الآخر مستحق $\frac{Q_n}{L_n}$ ہو تو

$$\frac{Q_n}{L_n} + \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} = \frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} + \frac{Q_n}{L_n} = \frac{Q_n}{L_n}$$

اور ان مساواتوں کو استعمال کرنے سے ہمیں $\frac{Q_n}{L_n}$ ، $\frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}}$ ،

کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم ہو سکتی ہیں۔

طالب علم دیکھ لے کہ مساوات (۲) کے تمام اضعاف
کے لئے درست رہتی ہے، مثلاً

$$\frac{1}{2} = \frac{Q_n}{L_n} \left(\frac{Q_{n-1}}{L_{n-1}} + \frac{Q_n}{L_n} \right)$$

ثبوت دیا ہی ہے جو پہلے دیا جا چکا ہے۔

۳۶۵ - دفعہ ۳۵۶ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک دوری سلسل
کسر ناطق سروں والی مساوات درجہ دوم کی اصل سے تعبیر ہو سکتی
ہے۔ برعکس اس کے دفعہ ۳۵ کے طریقہ سے ہم یہ ثابت

کر سکتے ہیں کہ $\frac{1}{1+a}$ کی شکل کے کسی جملہ کو جس میں 'ا' ب' ج' مثبت صحیح اعداد ہیں اور ب پورا مربع نہیں ہے ایک متوالی مسلسل کسور میں تحویل کیا جا سکتا ہے، ایس صورت میں دوری حصہ بالعموم دوسرے جزوی خارج قسمت سے شروع نہیں ہوگا نہ ہی آخری جزوی خارج قسمت پہلے سے دگنا ہوگا۔

متوالی مسلسل کسور کے مضمون کے متعلق مزید معلومات حاصل کرنے کے لئے طالب علم کو چاہئے کہ سیرٹ کے اعلیٰ الجبرا کے کورس کا مطالعہ کرے یا طامس ہائیکر صاحب ایم۔ اے ایف۔ آر۔ ایس کی کتاب "درجہ دوم کی مقدار اصم کی تعبیر مسلسل کسروں میں" ملاحظہ کرے۔

امثلہ نمبری ۲۷ (ب)

ذیل کی مقادیر اصم کو مسلسل کسور کی شکل میں بیان کرو اور ہر ایک کا چوتھا مستق معلوم کرو

$$1 - \frac{1}{1+a} \quad 2 - \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} \quad 3 - \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+c}$$

$$4 - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+c} \quad 5 - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} - \frac{1}{1+d}$$

$$6 - \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+e} = \frac{1}{1+f}$$

اور پانچواں مستق معلوم کرو۔

۸۔ ثابت کرو کہ

$$1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} + \frac{1}{1+e} = \frac{1}{1+f}$$

۹۔ ثابت کرو کہ

$$ق(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

$$ق(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

۱۰۔ اگر $1 + 1 + 1 + \dots$ کو مسلسل کسر کی شکل میں لایا جائے تو ثابت کرو کہ

$$2(1 + 1) = 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$2 ق(1) = 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$11۔ اگر لا = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

$$ما = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

$$می = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

تو ثابت کرو کہ $لا(ما - می) + می(لا - ما) + می(لا - ما) =$

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots)(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

$$13۔ اگر لا = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

$$ما = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

تو ثابت کرو کہ (ا ب + ا ب) ل = (ا ب + ا ب) م = ا - ب
 ۱۴۔ اگر $\frac{ق}{ل} = \frac{ا + ا}{ا + ا}$ کا ن واں مستحق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ق_۱ + ق_۲ + \dots + ق_n}{ل_۱ + ل_۲ + \dots + ل_n} = \frac{ق_۱}{ل_۱} - \frac{ق_۲}{ل_۲} - \dots - \frac{ق_n}{ل_n}$$

 ۱۵۔ ثابت کرو کہ

($\frac{ا}{ا + ا} + \frac{ب}{ب + ب} + \dots + \frac{ج}{ج + ج}$) ($\frac{ا}{ا + ا} + \frac{ب}{ب + ب} + \dots + \frac{ج}{ج + ج}$) = $\frac{ا + ب + ج}{ا + ا}$
 ۱۶۔ اگر $\frac{ق}{ل} = \frac{ا + ا}{ا + ا}$ کے ر وں مستحق کو تعبیر کرے،
 تو ثابت کرو کہ

$ق_۱ + ق_۲ + \dots + ق_n = ق_۱ - ق_۲ - \dots - ق_n$
 $ل_۱ + ل_۲ + \dots + ل_n = ل_۱ - ل_۲ - \dots - ل_n$
 ۱۷۔ ثابت کرو کہ لامتناہی سلسل کسور

$\frac{ا}{ا + ا} + \frac{ب}{ب + ب} + \dots + \frac{ا}{ا + ا} + \frac{ب}{ب + ب} + \dots$ اور $\frac{ا}{ا + ا} + \frac{ب}{ب + ب} + \dots$ کا فرق $\frac{ا - ب}{ا + ا}$ کے مساوی ہے۔

۱۸۔ اگر لک کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے اور اگر اسکے دور میں خارج قسموں کی تعداد ن ہو، تو ثابت کرو کہ

$$ل_۱ = ۲ ق_۱ ل_۱$$

$$ق_۱ = ۲ ق_۱' + (-۱)^{۱+۱}$$

۱۹۔ اگر $ل_۱$ کو مسلسل کسر میں تحویل کیا جائے اور اگر پہلے، دوسرے، تیسرے... ک وین متوالی دور میں ماقبل الآخر مستقوں کو بالترتیب $ل_۱$ ، $ل_۲$ ، $ل_n$ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ل_n + ل_۱}{ل_n - ل_۱} = \frac{ل_n + ل_۱}{ل_n - ل_۱}$$



اٹھائیسواں باب

درجہ دوم کی غیر معین مساواتیں

۳۶۶۔ جن غیر معین مساواتوں کا درجہ ایک سے زیادہ ہو ان کا حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرنا اگرچہ علی طور پر زیادہ سہو دشمن نہیں لیکن اس کا جو تعلق اعداد کے نظریہ کے ساتھ ہے اس کی وجہ سے دلچسپ ضرور ہے۔ اس باب میں ہم صرف دو متغیروں کی معادلات درجہ دوم پر بحث کریں گے۔

۳۶۷۔ لا اور ما کی ایسی قیمتیں مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو جو مساوات

لا + لا + ۲ = لا + ما + ب + ما + گ + لا + ۲ + ف + ما + ج = کو پورا کریں جہاں لا، ب، ج، ف، گ، ہ صحیح اعداد ہیں۔ اس مساوات کو لا میں درجہ دوم کی ایک مساوات فرض کر کے ایسکو دفعہ ۱۲۷ کے مطابق حل کرنے سے

$$لا + لا + ۲ = گ + (۲ - لا) + (۲ - ما) + (۲ - ہ) + (۲ - ف) + (۲ - ج) + (۲ - گ)$$

(۱).....

اب اگر لا اور ما کی قیمتیں مثبت صحیح اعداد ہوں تو ضرور ہے کہ علامت جذر کے اندر کا جملہ جوق ما + لا + ۲ سے تعبیر ہو سکتا ہے پورا مربع ہو یعنی فرض کرو کہ

ق ما + ل ۲ + ر = می
اس کو ما میں مساوات درجہ دوم سمجھ کر حل کرنے سے

$$\text{ق ما + ل} = \sqrt{\text{ل}^2 - \text{ق ر} + \text{ق می}}$$

حسب سابق علامت جذر کے اندر کا جملہ پورا مربع ہونا چاہئے۔
فرض کرو کہ یہ تئ کے مساوی ہے، تب

$$\text{تئ} - \text{ق می} = \text{ل}^2 - \text{ق ر}$$

جہاں ت اور می متغیر ہیں اور ق، ل، ر مستقل ہیں۔
ابتدائی مساوات کو مثبت صحیح اعداد میں حل کرنا اسی صورت
میں ممکن ہو سکتا ہے جبکہ مندرجہ بالا مساوات کا مثبت صحیح
اعداد میں حل کرنا ممکن ہو۔ اس بحث کی طرف ہم دفعہ ۴۷۴
میں رجوع کریں گے۔

اگر ل، ب، ہ سب مثبت ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ حلوں
کی تعداد محدود ہوگی کیونکہ لا اور ما کی بڑی قیمتوں کے لئے
دائیں جانب کے رکن کی علامت لا + ل ۲ + ر لا + ل ۲ + ب + ل ۲
کی علامت پر موقوف ہوگی (دیکھو دفعہ ۲۶۹) اور اس لئے لا
اور ما کی بڑی قیمتوں کے لئے جو مثبت صحیح اعداد ہوں یہ صفر
کے مساوی نہیں ہو سکتی۔

نیز اگر ہ = لا ب منفی ہو تو (۱) میں ما کا سر منفی ہوگا
اور اسی قسم کے استدلال سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ حلوں کی تعداد
محدود ہوگی۔

مثال - مثبت صحیح اعداد میں مساوات

$$\text{لا} - ۴ \text{ لا} + \text{ما} + ۶ \text{ ما} - ۲ \text{ لا} - ۲۰ = ۲۹$$

کے حل معلوم کرو۔

اس کو لا میں درجہ دوم کی ایک مساوات سمجھ کر حل کرنے سے

$$لا = ۱ + ۲ + ۳ + ۲۲ - ۲۲ = ۲$$

لیکن $۳۰ + ۲۲ - ۲ = ۱۰۲$ یا $۲ - ۱۰۲ = (۶ - ۲)$ پس
 $(۶ - ۲) = ۵$ سے بڑا نہیں ہو سکتا۔ جانچ کرنے سے ہم دیکھ
 سکتے ہیں کہ علامت جذر کے اندر کی رقم پورا مربع ہوگی جبکہ
 $(۶ - ۲) = ۱$ یا ۴۹ لہذا $ما$ کی مثبت صحیح عددی قیمتیں
 ۵، ۱۳ ہیں۔

جب $ما = ۵$ ، $لا = ۲۱$ یا ۱

جب $ما = ۱۳$ ، $لا = ۲۵$ یا ۵

جب $ما = ۱۳$ ، $لا = ۲۹$ یا ۲۵

۳۶۸ - ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ مثبت صحیح اعداد میں مساوات
 $لا + ۲ = ۲ + لا + ما + با + ۲$ گ $لا + ۲ = ۲ + لا + ج = ۰$
 کے حلوں کو ایک ایسی مساوات کے حلوں پر موقوف کر سکتے ہیں
 جس کی شکل

$$لا \pm ث = ما \pm ر$$

ہو جہاں $ث$ اور $ر$ مثبت صحیح اعداد ہیں۔
 مساوات $لا + ث = ما$ ۔۔۔ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور
 مساوات $لا + ث = ما$ کے حلوں کی تعداد محدود ہے
 جو آزمائش سے معلوم ہو سکتے ہیں، اس لئے ہم صرف ان مساواتوں
 پر بحث کریں گے جنکی شکل $لا - ث = ما \pm ر$ ہو۔

۳۶۹ - ثابت کرو کہ مساوات $لا - ث = ما$ کو ہمیشہ مثبت
 صحیح عددوں میں حل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کر دو کہ $ما$ $ث$ کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں تحول کر لیا

گیا ہے اور $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{ق}{ل}$ ، $\frac{ق}{ل}$ کوئی سے تین مسلسل مستحق ہیں۔

نیز فرض کرو کہ مستحق $\frac{ق}{ل}$ کے جواب میں مکمل خارج قسمت مات + ۱ ہے، تب

لے (ق ل - ق ل) = ث ل - ق ل [دفعہ ۳۵۸]

لیکن ہر ایک دور کے آخر میں لے = ۱ [دیکھو دفعہ ۳۶۱]

: ق ل - ث ل = ق ل - ق ل

جہاں $\frac{ق}{ل}$ کسی متوالی دور کا ماقبل الآخر مستحق ہے۔

اگر دور میں خارج قسموں کی تعداد جفت ہو تو $\frac{ق}{ل}$ جفت

مستحق ہے اور اسلئے مات سے بڑا ہے اور بنا بریں $\frac{ق}{ل}$ سے

بھی بڑا ہے۔ پس ق ل - ق ل = ۱، اس صورت میں

ق ل - ث ل = ۱، لہذا لا = ق اور ما = ل، مساوات

لا - ث ما = اکمال ہے۔

چونکہ $\frac{ق}{ل}$ ہر ایک متوالی دور کا ماقبل الآخر مستحق ہے،

اس لئے حلوں کی تعداد محدود ہے۔

اگر دور میں خارج قسموں کی تعداد طاق ہو تو پہلے دور کا ماقبل الآخر مستحق طاق واں مستحق ہوگا لیکن دوسرے

دور کا ماقبل الآخر مستدق جفت و اس مستدق ہے پس لا = ق
 ما = ل رکھنے سے صحیح عددی حل حاصل ہوں گے جہاں
 ق = دور سے جو تھے، چھٹے..... متوالی دور کا ماقبل الآخر
 مستدق ہے۔

لہذا اس صورت میں بھی حلوں کی تعداد غیر محدود ہے۔
 ۳۷۰۔ مثبت صحیح اعداد میں مساوات لا = ث ما = اکا
 حل معلوم کرو۔
 دفعہ ماقبل کی طرح

ق۔ ث لا = ق ل۔ ق ل

اگر دور میں خارج قسموں کی تعداد طاق ہو اور ق = ق کسی
 متوالی دور کا طاق و اس ماقبل الآخر مستدق ہو تو ق = ق > ق
 اس لئے ق ل۔ ق ل =۔ اس صورت میں ق۔ ث لا =
 اور مساوات لا۔ ث ما =۔ اکے صحیح عددی حل لا = ق، ما = ل
 رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں ق = پہلے، تیسرے،
 پانچویں،..... متوالی دور کا ماقبل الآخر مستدق ہے۔
 مثال۔ لا۔ ۱۳ ما = ۱۰ اکے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو
 ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$13 = 10 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

یہاں دور میں خارج قسموں کی تعداد طاق ہے، پہلے دور
 میں ماقبل الآخر مستدق $\frac{1}{5}$ ہے، پس لا = ۱۰، ما = ۵ مساوات

$$لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱$$

کا ایک حل ہے۔
دفعہ ۳۶۲ کی رو سے دوسرے متوالی دور کا ماقبل الآخر مستحق

$$\frac{۱}{۱۸۰} - \left(\frac{۱۸}{۵} + ۱۳ \times \frac{۵}{۱۸} \right) \text{ یعنی } \frac{۶۲۹}{۱۸۰}$$

ہے، اس لئے لا = ۶۲۹، ما = ۱۸۰ مساوات

$$لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱$$

کا حل ہے۔
اس طرح متوالی دوروں کے مسلسل ماقبل الآخر مستحق بنانے سے ہم مساواتوں

$$لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱ \text{ اور } لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱$$

کے جتنے حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔
۳۷۔ جب مساوات لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱ کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر لیا جائے تو ذیل کے طریقہ سے ہم جتنے اور حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ۱۷، ما = ۱۲، ک ایک حل ہے جہاں
۱۷² - ۱۳ × ۱۲² = ۱ (تک) تب (۱۷² - ۱۳ × ۱۲²) = ۱
جہاں ۱۷ کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

$$\text{پس } لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱ \text{ (تک) } لا^۲ - ۱۳ ما^۲ = ۱$$

$$۱ = (لا + ما) (لا - ما) = (۱۷ + ۱۲) (۱۷ - ۱۲) = (۲۹) (۵)$$

$$لا + ما = ۲۹ \text{ (تک) } لا - ما = ۵ \text{ (تک) اور } لا = ۱۷، ما = ۱۲ \text{ (تک)}$$

$$۲ = لا = (۱۷ + ۱۲) (۱۷ - ۱۲) = (۲۹) (۵)$$

۲ ما م ا ث = (ھ + ک م ا ث) ث - (ھ - ک م ا ث) ث

لا اور ما کی جو قیمتیں اس طرح معلوم ہوتی ہیں وہ مثبت صحیح اعداد ہیں اور ث کو بالتسلسل ۱، ۲، ۳، قیمتیں دینے سے ہم جتنے حل چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔
اسی طرح سے اگر لا = ھ، ما = ک مساوات لا - ث ما = ۱ - کا ایک حل ہو اور ث کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو تو لا - ث ما = (ھ - ک م ا ث) ث

پس لا اور ما کی قیمتیں وہی ہیں جو پہلے معلوم کی جا چکی ہیں لیکن ث کی قیمتیں ۱، ۲، ۳، تک محدود ہیں۔
۳۷۲ - لا = ۱ لا، ما = ۱ ما رکھنے سے مساوات لا - ث ما = ۱ - ۱ ہو جاتی ہے لا - ث ما = ۰ اور ہم پہلے بتا چکے ہیں کہ اس کو کس طرح حل کرنا چاہئے۔
۳۷۳ - ہم دفعہ ۳۶۹ میں دیکھ چکے ہیں کہ

ق - ث ل = ۱ - (ق ل - ق ل) ل = ۱ - ۱

لہذا م ا ث کو تناظر کسر مسلسل میں تحویل کرنے سے اگر اس کسر کے کسی مکمل خارج قسمت کا نسب نما لا ہو اور اس مکمل خارج قسمت کی بجائے جزوی خارج قسمت لینے سے جو مستحق حامل ہو وہ ق ہو

تو مساوات لا - ث ما = ۱ - ۱ میں سے ایک مساوات لا = ق اور ما = ل سے پوری ہوگی۔

نیز طاق مستحق سب م ا ث سے کم ہیں اور جفت مستحق

سب مساوات سے بڑے ہیں، پس اگر $\frac{ق}{ل}$ کوئی جفت

مستدق ہو تو $لا = ق$ اور $ما = ل$ مساوات $لا - ث = ما = ل$

کا ایک حل ہے اور اگر $\frac{ق}{ل}$ کوئی طاق مستدق ہو تو

$لا = ق$ اور $ما = ل$ مساوات $لا - ث = ما = ل$ کا ایک حل ہے

۳۷۴۔ دفعہ ماقبل میں جو طریقہ بتایا گیا ہے اس کی مدد سے مساواتوں $لا - ث = ما = ل$ میں سے ایک کا حل معلوم ہو سکتا ہے جہاں $ل$ اُن نسب نماؤں میں سے ایک ہے جو $ما$ یا $ث$ کو مسلسل کسر میں تخیل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم $ما$ کو مسلسل کسر میں تخیل کریں تو ہمیں معلوم ہو گا کہ

$$..... \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

اور مکمل خارج قسمتوں کے نسب نما ۳، ۲، ۱ ہیں۔
متواتر مستدق

$$..... \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{13}{5} + \frac{21}{8} + \frac{34}{13} + \frac{55}{21} + \frac{89}{34} + \frac{144}{55}$$

ہیں اور اگر ہم مساواتوں

$$لا - ث = ما = ل، لا - ث = ما = ۲، لا - ث = ما = ۳$$

کا دور لیں تو ہمیں معلوم ہو گا کہ یہ مساواتیں

لا کی قیمتوں ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، سے

اور $ما$ کی متناظر قیمتوں ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، سے

پوری ہوتی ہیں۔
۳۷۵۔ اس سے ظاہر ہے کہ بہت محدود صورتوں میں مساواتوں

لا۔ ث ما = ± کے حل یقینی طور پر صحیح عددوں میں معلوم ہو سکتے ہیں تاہم کسی عددی مثال میں بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ ہم محض جانچ یا آزمائش سے مساواتوں لا۔ ث ما = ± کے حل کا ایک حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر لیتے ہیں جبکہ دوسرا مثلاً بالا نسب نماؤں میں سے نہ ہو۔ مثلاً ہم آسانی سے معلوم کر سکتے ہیں کہ مساوات لا۔ ث ما = ۵۳ لا = ۹ سے پوری ہوتی ہے جب ایک حل معلوم ہو جائے تو حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے جیسا کہ ذیل کی دفعہ میں بتایا گیا ہے۔

۳۷۶۔ فرض کرو کہ لا = ف، ما = ک، مساوات لا۔ ث ما = لا کا ایک حل لا = ہ، ما = ک ہے۔ تب

لا۔ ث ما = (ف۔ ث گ) (ہ۔ ث ک)

= (ف ہ ± ث گ ک)۔ ث (ف ک ± گ ہ)

لا = ف ہ ± ث گ ک اور ما = ف ک ± گ ہ رکھنے سے اور ہ، ک کو انکی قیمتیں جو دفعہ ۳۷۵ کے مطابق معلوم کی جاسکتی ہیں دینے سے حلوں کی کوئی تعداد معلوم ہو سکتی ہے۔

۳۷۷۔ اب تک ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ ث پورا مربع نہیں ہے اگر ث پورا مربع ہو تو مساوات کی شکل لا۔ ث ما = لا ہو جاتی ہے، جس کو ذیل کے طریقہ سے فوراً حل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ لا = باج جہاں ب اور ج دو مثبت صحیح اعداد ہیں جن میں ب بڑا ہے، تب

(لا + ث ما) (لا۔ ث ما) = باج

رکھو لا + ث = ما = ب اور لا - ث = ما = ج، اگر لا اور ما کی وہ
 قیمتیں جو ان مساواتوں سے حاصل ہوں صحیح اعداد ہوں تو
 ب اور ج کو سب ممکن قیمتیں دینے سے باقی حل معلوم
 ہو سکتے ہیں۔
 مثال - دو مثبت صحیح اعداد معلوم کرو جن کے مربعوں کا فرق ۶۰ ہو
 فرض کرو کہ لا اور ما مطلوبہ اعداد ہیں، تب لا - ما = ۶۰
 یعنی (لا + ما) (لا - ما) = ۶۰
 اب ۶۰ ذیل کے زوجوں میں سے ہر ایک کے حاصل ضرب کے
 مساوی ہے
 $10 \times 6, 12 \times 5, 15 \times 4, 20 \times 3, 30 \times 2, 60 \times 1$
 اور مطلوبہ قیمتیں مساواتوں
 $10 = لا + ما$ $30 = لا + ما$
 $6 = لا - ما$ اور $2 = لا - ما$
 سے معلوم ہو سکتی ہیں، باقی مساواتوں سے لا، ما کی جو قیمتیں
 حاصل ہوتی ہیں وہ کسری ہیں۔
 پس اعداد مطلوبہ ۱۶، ۱۴ اور ۸، ۲ ہیں۔
 نتیجہ صریح - اسی طرح سے ہم مساوات
 $لا + ۲ = لا + ما + ب + ۲$ $لا + ۲ = لا + ما + ج + ۲$
 کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دائیں جانب کے
 رکن کو دو ناطق خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا ممکن ہو۔
 ۳، ۶، ۸ - اگر عام مساوات میں لا یا ب یا دونوں صفر ہوں تو
 دفعہ ۳۶ کا طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ذیل کی مثال کے مطابق
 عمل کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔
 مثال - مثبت صحیح اعداد میں حل کرو

لا۔ لا ما۔ ما = ی (فرض کرو)

لا (لا۔ ما) = ی۔ ما

یہ مساوات مفروضات

۴ لا = ن (ی + ما) اور ن (لا۔ ما) = ۴ (ی۔ ما)
سے پوری ہوتی ہے جہاں ۴ اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں۔
لہذا ۴ لا۔ ن ما۔ ن ی = ۰

اور ن لا + (۴۔ ن) ما۔ ۴ ی = ۰
ضرب چلیپائی سے ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

لا = ما = ی
۴ ما۔ ن۔ ن = ۴ ما۔ ن۔ ن = ۴ ما۔ ن۔ ن + ن
اور چونکہ مساوات زیر بحث متجانس ہے، اس لئے ہم اس کے
عام حل

لا = ۴ ما۔ ن۔ ن = ۴ ما۔ ن۔ ن = ۴ ما۔ ن۔ ن + ن

لے سکتے ہیں۔ یہاں ۴ اور ن دو مثبت صحیح اعداد ہیں۔
جن میں سے ۴ بڑا ہے مثلاً اگر ۴ = ۷، ن = ۲ تو

لا = ۴ ما۔ ن۔ ن = ۴ ما۔ ۳۳ = ۳۷

مثال ۲۔ تین مثبت صحیح اعداد سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور
یہ عدد ایسے ہیں کہ ان میں سے ہر دو کا مجموعہ پورا مربع
ہے، ان کے لئے عام حل معلوم کرو۔
ان اعداد کو لا۔ ما، لا، لا + ما سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ

لا۔ ما = ق، لا = ن، لا + ما = ر

تب ق + ر = ۲ ن

یا $ل - ل' = ل' - ق'$
 یہ مساوات ذیل کے مفروضات

$$م (ل - ل') = م (ل - ق) \quad م (ل + ل') = م (ل + ق)$$

سے پوری ہوتی ہے جہاں $م$ اور $ن$ مثبت صحیح اعداد ہیں۔
 ضرب چلیپائی سے ہمیں ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ق}{ل} = \frac{م}{ن} = \frac{ن + م - م}{ن + م - م} = \frac{ن + م - م}{ن + م - م}$$

پس عام حل

$$ق = ن + م - م, \quad ل = م + ن - م, \quad م = م + ن - م$$

لے سکتے ہیں جہاں

$$لا = \frac{1}{2} (م + ن), \quad ما = م + ن - م$$

اور پھر تین صحیح اعداد مطلوبہ آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔
 لا کی قیمت سے ظاہر ہے کہ $م$ اور $ن$ یا دونوں جفت
 ہیں یا دونوں طاق۔ نیز ان کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں

$$کہ لا < ما یعنی (م + ن) < م + ن - م$$

$$یعنی م (م - ن) < م (م + ن - م) + م (ن - م) < م (ن - م)$$

شرط پوری ہوتی ہے اگر $م < ن$

اگر $م = ۹$ ، $ن = ۱$ تو $لا = ۳۳۶۲$ ، $ما = ۲۸۸۰$ اور اعداد ہیں
 ۳۸۴۴ ، ۳۳۶۲ ، ۶۲۴۲ ، ان میں سے دو دو کے حامل جمع
 ۳۸۴۴ ، ۶۲۴۲ اور ۹۶۰۴ ہیں جو بالترتیب ۶۲ ، ۸۲ ، ۹۸ کے
 مرتبے ہیں۔

اشکلہ نمبری ۲۸

ذیل کی مساواتوں کے حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

$$۱- ۵ \text{ ل} - ۱۰ \text{ لا} = ۷ \text{ ما} = ۷۷$$

$$۲- ۷ \text{ ل} - ۲ \text{ لا} = ۳ \text{ ما} = ۲۷$$

$$۳- ۲ \text{ ل} - ۵ \text{ لا} = ۱۰ \text{ ما} = ۲$$

$$۴- ۲ \text{ ل} - ۲ \text{ لا} = ۸ \text{ ما} = ۵$$

$$۵- ۳ \text{ ل} - ۳ \text{ لا} = ۴ \text{ ما} = ۱۴$$

$$۶- ۴ \text{ ل} - ۳ \text{ لا} = ۵ \text{ ما} = ۳۱$$

ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا چھوٹے سے چھوٹا حل مثبت صحیح اعداد میں معلوم کرو۔

$$۷- ۴ \text{ ل} - ۴ \text{ لا} = ۱۹ \text{ ما} = ۱$$

$$۸- ۵ \text{ ل} - ۶ \text{ لا} = ۷۱ \text{ ما} = ۵$$

$$۹- ۷ \text{ ل} - ۷ \text{ لا} = ۹$$

ذیل کی مساواتوں میں سے ہر ایک کا عام سے عام مثبت صحیح عددی حل معلوم کرو۔

$$۱۰- ۵ \text{ ل} - ۵ \text{ لا} = ۱$$

$$۱۱- ۷ \text{ ل} - ۱۷ \text{ لا} = ۱$$

لا اور ما کی ایسی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جن سے ذیل کا ہر ایک جملہ پورا مربع بن جائے۔

$$۱۲- ۳ \text{ ل} - ۳ \text{ لا} + ۲ \text{ ما} = ۲$$

$$۱۳- ۵ \text{ ل} + ۲ \text{ ما} = ۲$$

۱۸- دو مثبت صحیح عدد ایسے معلوم کرو کہ ان میں سے ایک کا مربع دوسرے کے مربع سے بقدر ۱۰۵ کے بڑا ہو۔

۱۹- تین ایسے عددوں کے لئے عام سے عام ضابطہ معلوم

کرد جن سے قائم الزاویہ مثلث کے اضلاع کے طول تعبیر

ہو سکتے ہیں۔ دو مثبت صحیح عدد ایسے ہیں کہ اگر ان کے مربعوں کے مجموعہ میں ان کا حاصل ضرب جمع کر دیا جائے تو کل مجموعہ پورا مربع ہوتا ہے، ان عددوں کے لئے عام ضابطہ معلوم کرو۔
۲۱۔ میرے پاس تین تھے شادی شدہ آدمی مع اپنی بیویوں کے ملنے کے لئے آئے مردوں کے نام دیوی دیال، متھرا داس اور رام گوپال تھے اور عورتوں کے بستی، کیسری اور بلجھی لیکن مجھے یہ معلوم نہیں کہ ہر مرد کی بیوی کا نام کیا ہے۔ انہوں نے مجھ سے کہا کہ وہ سب بازار میں گائے کے بچھڑے خریدنے گئے تھے اور ہر ایک نے اتنے بچھڑے خریدے جتنے کہ ایک بچھڑے کے لئے شلنگ ادا کئے۔ دیوی دیال نے کیسری کی نسبت ۲۳ بچھڑے زیادہ خرید کئے اور متھرا داس نے بستی کی نسبت ۱۱ زیادہ خریدے۔ نیز ہر ایک آدمی نے اپنی بیوی کی نسبت ۳ گنی زیادہ خرچ کئے، میں ہر ایک مرد کی بیوی کا نام جداگانہ معلوم کرنا چاہتا ہوں۔

۲۲۔ اگر ۲۱ کے کسی طاق مستحق کا شمار کنندہ ک ہو اور کسی جفت مستحق کا شمار کنندہ ک ہو تو ثابت کرو کہ پہلے کا یا ک۔ ۱ طبعی اعداد کا حاصل جمع پورا مربع ہوگا



انسووان با

سلسلوں کو جمع کرنا

۳۸۰۔ ابواب ماقبل میں بعض قسم کے سلسلوں کے جمع کرنے کی مثالیں درج کی جا چکی ہیں، سلسلوں کے جمع کرنے کے متعلق جن طریقوں کی تفصیل پہلے آ چکی ہے وہ حسب ذیل ہیں۔

- (۱) سلسلہ حسابیہ باب ۴
 - (۲) سلسلہ ہندیہ باب ۵
 - (۳) وہ سلسلے جو جزوی طور پر حسابیہ اور جزوی طور پر ہندیہ ہوتے ہیں۔ دفعہ ۶۰ کے متعلقہ سلسلوں کے
 - (۴) طبعی اعداد کی قوتوں اور ان کے متعلقہ سلسلوں کے حاصل جمع دفعات ۶۸ تا ۷۵
 - (۵) نامعلوم سروں کی مدد سے جمع کرنا دفعہ ۳۱۲
 - (۶) متوالی سلسلے باب ۲۴
- اب ہم زیادہ عام طریقوں پر بحث کرنے کی طرف متوجہ ہوتے ہیں۔ لیکن بائیں حصہ باب ہذا کے دوران میں یہ معلوم ہو گا کہ متذکرہ بالا طریقے بھی بعض صورتوں میں مفید طور پر استعمال ہو سکتے ہیں۔
- ۳۸۱۔ اگر ایک سلسلہ کی رو میں رقم دو ایسی مقادیر کے فرق سے تبصر ہو سکے جن میں سے ایک رقم ر کا دہی تفاعل

ہو جو دوسری رقم ر۔ اکا ہے تو سلسلہ کا حامل جمع آسانی سے
محسوب ہو سکتا ہے
فرض کرو کہ ایسا سلسلہ

$$ع + ع + ع + + ع$$

ہے اور اس کا حامل جمع ج ہے ، نیز فرض کرو کہ اس کی
ر، دیں رقم و۔ و۔ کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔ تب

$$ج = (و - و) + (و - و) + + (و - و)$$

$$+ (و - و)$$

$$= و - و$$

مثال - سلسلہ ذیل

$$..... + \frac{1}{(9+1)(9+1)} + \frac{1}{(9+1)(9+1)} + \frac{1}{(9+1)(9+1)}$$

کون رقموں تک جمع کرو۔
اگر ہم سلسلہ بالا کو

سے تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ

$$ع = \frac{1}{9} - \frac{1}{9+1}$$

$$ع = \frac{1}{9} - \frac{1}{9+1}$$

$$ع = \frac{1}{9} - \frac{1}{9+1}$$

.....

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

پس جمع کرنے سے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

مثال - تیسویں باب کی رو سے بعض اوقات ع کو جزوی کسور میں تحویل کرنے سے نہایت مناسب احتمال معلوم ہو سکتا ہے۔

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

مثال - تاں رقم

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

مثال - اور + کو یکے بعد دیگرے صفر کے مساوی فرض کرنے سے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots \right)$$

پس

$$\text{اسی طرح سے } \frac{1}{1-a} = \left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^2} \right) + \frac{1}{1-a^2}$$

$$\frac{1}{1-a^2} = \left(\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{1-a^4} \right) + \frac{1}{1-a^4}$$

$$\text{شج } \frac{1}{1-a} = \left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-a^2} \right) + \frac{1}{1-a^2}$$

۳۸۳۔ ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم کے اجزائے ضربی سے بنی ہوئی ہے اور یہ اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، نیز ہر ایک رقم کے ابتدا میں جلاگانہ جو جزو ضربی واقع ہوتے ہیں وہ سب ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اس سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔
فرض کرو کہ سلسلہ

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^n \text{ سے تعبیر ہوتا ہے}$$

$$\text{جہاں } a = (1+a)(1+a^2)(1+a^3)\dots(1+a^n) \dots (1+a^{2n}) \dots$$

ن کی بجائے ن-۱ رکھنے سے

$$a = (1+a)(1+a^2)(1+a^3)\dots(1+a^{n-1}) \dots (1+a^{2n-2}) \dots$$

$$a = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{n-1}) = a \text{ فرض کرو کہ}$$

ن کی بجائے ن+۱ رکھنے سے

$$(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n) = a$$

لہذا تفریق کرنے سے

$$(1+r)ب \times ع_1 = ع_1 + 1 - و_1$$

$$\text{اسی طرح } (1+r)ب \times ع_2 = ع_2 + 1 - و_2$$

$$(1+r)ب \times ع_3 = ع_3 + 1 - و_3$$

$$(1+r)ب \times ع_4 = ع_4 + 1 - و_4$$

$$\text{جمع کرنے سے } (1+r)ب \times ج_1 = ج_1 + 1 - و_1$$

$$\text{یعنی } ج_1 = \frac{ع_1 + 1 - و_1}{(1+r)ب}$$

$$= \frac{(1+r)ب + ع_1}{(1+r)ب} + \dots$$

کوئی مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جس کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

مندرجہ بالا جواب سے ہمیں ذیل کا آسان کلیہ معلوم ہوتا ہے

پہلے ن میں رقم لکھ لو اور اس کے آخری جزو ضربی کے بعد کا (یعنی ن + ۱) جزو ضربی بعد میں لکھ دو پھر اضافہ شدہ اجزائے ضربی کی تعداد اور مشترک فرق کے حاصل ضرب پر تقسیم کر کے ایک مستقل رقم جمع کر دو۔

یہ دیکھ لینا چاہئے کہ $م = \frac{ع_1}{(1+r)ب} - \frac{و_1}{(1+r)ب}$ لیکن $م$ کی بجائے اس کی یہ قیمت نہ لینا ہی بہتر ہے، $م$

کی قیمت حسب بالا معلوم کرنی چاہئے۔
مثال - سلسلہ

$$..... + 9 \times 4 \times 5 + 4 \times 5 \times 3 + 5 \times 3 \times 1$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن دیں رقم (۲-ن) (۱+ن) (۱+ن) (۳+ن) ہے۔
پس قاعدہ کی رو سے

$$ج = \frac{(۱-ن)(۱+ن)(۳+ن)(۵+ن)}{۸} + م$$

م کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ن = ۱ رکھنے سے سلسلہ
میں صرف پہلی رقم رہ جاتی ہے، پس

$$\frac{۱۵}{۸} = م + \frac{۴ \times ۵ \times ۳ \times ۱}{۸} = ۱۵$$

$$ج = \frac{۱۵}{۸} + \frac{(۵+ن)(۳+ن)(۱+ن)(۱-ن)}{۸}$$

جو اختصار کے بعد = ن (۲+ن+۸+ن-۲)
۳۸۴ - دفعہ ماقبل کا حاصل جمع نامعلوم سروں کے طریقہ
سے بھی معلوم ہو سکتا ہے (دیکھو دفعہ ۲۱۲) نیز ملاحظہ ہو
ذیل کا طریقہ -

نظاہر ہے کہ ع = (۱-ن)(۱+ن)(۳+ن)(۵+ن) = ۲+ن+۸+ن-۲
پس دفعہ (۱۰۰) کی ترقیم کی رو سے

$$ج = ۸ + ۱۲ + ۲ - ن - ۳$$

$$ج = ۲ + (۱+ن) + ۲ + (۱+ن) + ۲ - (۱+ن) - ۳$$

$$= ن (۲+ن+۸+ن-۲)$$

۳۸۵ = یاد رہے کہ دفعہ ۳۸۳ کا طریق صرف اسی صورت میں کارآمد ہو سکتا ہے جبکہ ہر ایک رقم کے اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو جزو ضربی ہوتے ہیں وہ ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔ مثلاً سلسلہ

.....۹x۴x۵+۴x۵x۳+۶x۴x۲+۵x۳x۱
کا حاصل جمع ان دو کلیوں میں سے جن کا دفعہ ماقبل میں ذکر ہوا ہر ایک سے نکل سکتا ہے لیکن دفعہ ۳۸۳ کے قاعدہ سے براہ راست نہیں نکل سکتا۔

یہاں $n = 6$ $(n+2)(n+1) = (n+2)(n+1) = (n+2)(n+1)$

$= n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2)$
 $= n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+2)$
یہی قاعدہ ہر رقم پر لگائے سے

جن $= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)$

$+ \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)$
 $= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2) + \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)$
رقم صفر ہے۔

۳۸۴ = ایک سلسلہ کی ہر ایک رقم ایسے ر اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے متکافی پر مشتمل ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور نیز ہر رقم کے ابتدا میں جداگانہ جو اجزائے ضربی واقع ہوتے ہیں وہ بھی ایک ہی سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اس سلسلہ کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔ سلسلہ کو

$$ع + + ع + ع + ع$$

سے تعبیر کرو۔

جہاں $\frac{1}{ع} = (ا + ن ب) (ا + ن اب) (ا + ن ۲ب) (ا + ن ۲۲ب)$
 ن کی بجائے ن - ۱ رکھنے سے

$$\frac{1}{ع-۱} = (ا + ن - اب) (ا + ن - ۲ب) (ا + ن - ۲۲ب)$$

∴ $(ا + ن - اب) ع = (ا + ن - اب) ع - ۱ = فن$ (فرض کرو)
 ن کی بجائے ن + ۱ رکھنے سے

$$(ا + ن ب) ع = فن + ۱$$

اس لئے تفریق کرنے سے

$$(۱ - ا) ب \times ع = فن - فن + ۱$$

اسی طرح سے $(۱ - ا) ب \times ع - ۱ = فن - ۱ - فن$

.....

$$(۱ - ا) ب \times ع = فن - فن + ۱$$

$$(۱ - ا) ب \times ع = فن - فن + ۱$$

پس جمع کرنے سے $(۱ - ا) ب \times ج = فن - فن + ۱$

یعنی $ج = \frac{فن - فن + ۱}{(۱ - ا) ب} = م - \frac{(ا + ن ب) ع}{(۱ - ا) ب}$

جہاں م ایک مقدار ہے جو ن کے تابع نہیں اور جسکی قیمت

ن کو کوئی خاص قیمت دینے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

پس جی = م - $\frac{1}{(1-r)ب}$ × $\frac{1}{(1+n+اب) \dots (1+n+r+اب)}$
 لہذا حاصل جمع ذیل کے کلیہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔
 ن ویں رقم لکھ لو اور پھلا جزو ضربی نکال دو۔ پھر
 اجزائے ضربی کی جو تعداد لگ جائے اُس سے اور فرق سے
 تقسیم کرنے ایک مستقل رقم جمع کر دو۔

م کی قیمت = $\frac{م}{(1-r)ب} = \frac{1+r}{(1-r)ب}$
 لیکن ہر ایک صورت میں م کی قیمت ن کو کوئی خاص قیمت
 دیکر معلوم کرنا ہی مناسب اور مصلحت آمیز ہوتا ہے۔
 مثال ۱۔ سلسلہ ذیل

$$\dots + \frac{1}{6 \times 5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

ن ویں رقم = $\frac{1}{ن(1+n)(2+n)(3+n)}$ ہے
 پس کلیہ کی رو سے

جی = م - $\frac{1}{3(1+n)(2+n)(3+n)}$

ن = ۱ رکھو تب $\frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} - م = \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
 جس سے م = $\frac{1}{12}$

لہذا جی = $\frac{1}{12} - \frac{1}{3(1+n)(2+n)(3+n)}$

ن کو لا انتہا بڑا بنا دینے سے ہمیں ج کے قیمت $\frac{1}{18}$ حاصل ہوتی ہے۔
مثال ۲۔ سلسلہ

$$\dots\dots\dots + \frac{5}{4 \times 3 \times 2} + \frac{4}{5 \times 3 \times 2} + \frac{3}{4 \times 3 \times 2}$$

کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔
یہاں مندرجہ بالا قاعدہ کا بالکلست اطلاق نہیں ہو سکتا
کیونکہ اگرچہ نسب نماؤں کے نیلے اجزاء، ضربی جو جداگانہ
۱، ۲، ۳، کے مساوی ہیں، سلسلہ حسابیہ میں ہیں لیکن
کسی ایک نسب نما کے اجزائے ضربی سلسلہ حسابیہ میں نہیں
ہیں۔ اس مثال میں ہمیں حسب ذیل عمل کرنا چاہئے۔
(۲ + ن)

$$\frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)} = \frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)}$$

$$= \frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)}$$

$$\frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)} + \frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)} + \frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)} =$$

اب ان تین رقموں میں سے ہر ایک کو ن دیں رقم کا ایک جزو
خیال کیا جاسکتا ہے جو جداگانہ مندرجہ بالا قاعدہ کے تحت میں
آتی ہیں

$$\frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)} - \frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)} - \frac{1}{(3+N)(2+N)(1+N)} =$$

ن = ۱ رکھنے سے

$$\frac{1}{4 \times 3 \times 2} - \frac{1}{5 \times 3 \times 2} - \frac{1}{4 \times 3 \times 2} = \frac{1}{4 \times 3 \times 2}$$

ج = $\frac{۲۹}{۳۶} - \frac{۱}{۳+ن} - \frac{۳}{۲(۲+ن)(۳+ن)} - \frac{۴}{۳(۱+ن)(۲+ن)(۳+ن)}$
 ۳۸۶۔ جن صورتوں پر دفعات ۳۸۳، ۳۸۴ کے قاعدوں کا
 اطلاق بالمرست ہو سکتا ہے، ان صورتوں میں ہم ضابطوں کو
 استعمال کرنے کی بجائے ہمیشہ جمع کا عمل بطریق ذیل کر سکتے
 ہیں، اس طریقہ کو بعض اوقات تفریق کا طریقہ بھی کہتے ہیں۔
 مثال۔ سلسلہ

..... + ۱۴ × ۱۱ + ۱۱ × ۸ + ۸ × ۵ + ۵ × ۲
 کو ن رقموں تک جمع کرو۔
 اس صورت میں سلسلہ حسابیہ

۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ہے۔
 سلسلہ زیر بحث کی ہر رقم کے اجزائے ضربی میں سلسلہ
 حسابیہ کے لحاظ سے بعد کے عدد کا بطور جزو ضربی اضافہ
 کرو۔ اس طرح سے جو سلسلہ حاصل ہو اس کو ج سے
 اور اصلی سلسلہ کو ج سے تعبیر کرو، تب

ج = $۸ \times ۵ \times ۲ + ۸ \times ۵ \times ۵ + ۱۱ \times ۸ \times ۸ + ۱۴ \times ۱۱ \times ۱۴ + \dots$
 $+ (۵+ن۳)(۲+ن۳)(۱+ن۳)$
 ج = $۸ \times ۵ \times ۲ + ۸ \times ۵ \times ۵ + ۱۱ \times ۸ \times ۸ + ۱۴ \times ۱۱ \times ۱۴ + \dots$
 ن۔ ۱۔ رقموں تک

تفریق کرنے سے

$۹ = ۸ \times ۵ \times ۲ - [۱۴ \times ۱۱ + ۱۱ \times ۸ + ۸ \times ۵ + \dots + ن - ۱ \text{ رقموں تک}]$
 $-(۵+ن۳)(۲+ن۳)(۱+ن۳)$
 $۹ = ۸ \times ۵ \times ۲ - [۵ \times ۲ - ج] - (۵+ن۳)(۲+ن۳)(۱+ن۳)$

$$9 \text{ ج} = (3 - \text{ن}) (1 - \text{ن}) (2 + \text{ن}) (3 + \text{ن}) - (5 + \text{ن}) (2 + \text{ن}) (3 + \text{ن}) - 9 \times 5 \times 2 + 8 \times 5 \times 2$$

$$\therefore \text{ج} = \text{ن} (3 + \text{ن} + 2 + \text{ن} + 1)$$

۳۸۸۔ جب کسی سلسلہ کی ن ویں رقم ن کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو تو یہ سلسلہ ایک ایسی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جس پر دفعہ ۳۸۳ کا اطلاق آسانی سے ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ف (ن) کا ایک ناطق، صحیح، قی ابعاد کا تفاعل ہے اور مان لو کہ

ف (ن) = ۱ + ب + ج + ن (۱ + ن) + ۲ + د + ن (۱ + ن) + ۳ + جہاں ا، ب، ج، د، غیر معین مستقل ہیں جو تعداد میں قی + ہیں۔ چونکہ یہ مساوات متبادلہ ن کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے اس لئے ہم ن کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں قی + مستقل معلوم کرنے کے لئے قی + اسادہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ مثال۔ ایک ایسے سلسلہ کی ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو جس کی ن ویں رقم ن + ۶ + ن + ۵ ن ہے۔ فرض کرو کہ

$$\text{ن} + ۶ + ۵ \text{ن} = ۱ + ب + ج + ن (۱ + ن) + ۲ + د + ن (۱ + ن) + ۳ + \dots$$

+ ع + ن (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن) یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ۱ = ب، ۰ = ج، ۰ = د، ۱ = ع اور ۲ = ۳۔ رکنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ج = ۶، د = ۵، ۰ = پس

$$\text{ن} + ۶ + ۵ \text{ن} = \text{ن} (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن) - (۲ + ن) (۳ + ن) (۴ + ن) + (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن)$$

$$\text{اس لئے ج} = \frac{1}{6} \text{ن} (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن) - (۲ + ن) (۳ + ن) (۴ + ن) + (۱ + ن) (۲ + ن) (۳ + ن)$$

$$\frac{1}{5} = \frac{n}{(1+n)} \frac{(2+n)}{(2+n)} \frac{(3+n)}{(3+n)} \frac{(4+n)}{(4+n)} \frac{(5+n)}{(5+n)}$$

کثیر ضلعی اور اشکالی اعداد

۳۸۹۔ ایک سلسلہ حسابیہ کی پہلی رقم ۱ ہے اور مشترک فرق ب ہے، ظاہر ہے کہ اس سلسلہ کی n رقموں کا حاصل جمع $\frac{n}{2}(1+n)$ ہوگا، اگر ہم اس جملہ میں ب کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، قیمتیں دیں تو ہمیں اعداد

$$1, 2, 3, \dots, n, \frac{n}{2}(1+n), \frac{n}{2}(1+n), \frac{n}{2}(1+n), \dots$$

حاصل ہوتے ہیں۔ وہ سلسلے جنکی n ویں رقمیں ان عددوں کے جداگانہ مساوی ہوں بالترتیب دوسرے، تیسرے، چوتھے، پانچویں، رتبہ کے کثیر ضلعی عدد کہلاتے ہیں۔ پہلے رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کے سلسلہ میں ہر رقم ۱ کے مساوی ہے، دوسرے، تیسرے، چوتھے، پانچویں، رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کو خطی، مثلث، مربع، پنجم، اعداد بھی کہتے ہیں۔

۳۹۰۔ r، ویں رتبہ کے کثیر ضلعی اعداد کی پہلی n رقموں کا مجموعہ معلوم کرو۔

$$r، ویں رتبہ کے اعداد کی n، ویں رقم n + \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(1+n) = n(1+n)$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(1+n) + \dots + \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(1+n) \times r = \frac{n}{2}r(1+n)$$

$$\frac{n}{2}r(1+n) = \frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(1+n) + \dots + \frac{n}{2}(1+n) \quad [\text{دفعہ ۳۸۹}]$$

$$\frac{n}{2}r(1+n) = \frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(1+n) + \frac{n}{2}(1+n) + \dots + \frac{n}{2}(1+n)$$

۳۹۱- اگر سلسلہ

.....'۱'۱'۱'۱'۱

کی ن رقموں کے مجموعہ کو ایک نئے سلسلہ کی ن میں رقم قرار دیا جائے تو ہمیں ایک اور سلسلہ

.....'۱'۲'۳'۴'۵

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح سے اگر ہم موخر الذکر سلسلہ کی ن رقموں کے مجموعہ

یعنی $\frac{n(n+1)}{2}$ کو ایک اور سلسلہ کی ن میں رقم قرار دیں

تو ہمیں سلسلہ

.....'۱'۳'۶'۱۰'۱۵

حاصل ہوتا ہے۔ یہی عمل بار بار کرنے سے ہمیں مسلسل ایسے سلسلے

میتے ہیں جن میں سے ہر ایک سلسلہ کی ن میں رقم سلسلہ قبل

کی ن رقموں کے مجموعہ کے برابر ہوتی ہے۔ ایسا مسلسل سلسلوں

کو پہلے، دوسرے، تیسرے، رتبہ کے اشکالی اعداد کہتے ہیں

۳۹۲- '۱' میں رتبہ کے اشکالی اعداد کی ن میں رقم اور ن

رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

پہلے رتبہ کی ن میں رقم ۱ ہے، دوسرے رتبہ کی ن ہے

تیسرے رتبہ کی ن میں $\frac{1}{2}n(n+1)$ چوتھے رتبہ کی ن میں

رقم $\frac{n(n+1)(n+2)}{2 \times 1}$ یعنی $\frac{n(n+1)(n+2)}{3 \times 2 \times 1}$ ہے، پانچویں رتبہ

کی ن میں رقم $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3 \times 2 \times 1}$ یعنی $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

اور علیٰ ہذا القیاس۔

اسی طرح سے آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ 'ر' میں رتبہ کی 'ن' میں
 رقم $\frac{(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)}{(1-r)(2-r) \dots (n-r)}$ یعنی $\frac{(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)}{(1-r)(2-r) \dots (n-r)}$ ہے
 نیز 'ر' میں رتبہ کی 'ن' رقموں کا مجموعہ

$$\frac{(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)}{(1-r)(2-r) \dots (n-r)}$$

ہے جو $(1-r)$ میں رتبہ کے اشکالی اعداد کی 'ن' میں رقم ہے۔
 نوٹ۔ کسی رتبہ کے اشکالی اعداد کی 'ن' رقموں کا حاصل جمع معلوم
 کرنے کے لئے دفعہ ۳۸۳ کا قاعدہ لگانے سے معلوم ہو گا کہ مستقل
 رقم ہمیشہ صفر ہوتی ہے۔

۳۹۳۔ حکیم پاسکل نے اپنی کتاب ٹریٹی ڈو ٹرائینگل اریٹمیٹک میں
 جو ۱۶۶۵ء میں طبع ہوئی اشکالی اعداد کے خواص پر بحث کی ہے
 اس لحاظ سے یہ اعداد تاریخی دلچسپی بھی رکھتے ہیں۔
 ذیل کی جدول میں سادہ شکل کا ایک حسابی مثلث دکھایا گیا ہے۔

۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
		۳۶	۲۸	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳	۱	
			۸۴	۵۶	۳۵	۲۰	۱۰	۴	۱	
				۱۲۶	۷۰	۳۵	۱۵	۵	۱	
					۱۲۶	۵۶	۲۱	۶	۱	
						۸۴	۲۸	۷	۱	
							۳۶	۸	۱	
								۹	۱	

پاسکل نے مثلث بالا کے اعداد کو ذیل کے قاعدہ کی رو سے

ان سب رقوم کے حاصل جمع کو تعبیر کریگا جو $(1-n)$ میں لاگو
 ل سے لیکر n تک سب صحیح عددی قیمتیں دینے سے حاصل ہوتی
 ہیں جہاں n اور m دونوں شامل ہیں۔ بطور مثال کے فرض
 کرو کہ اس سلسلہ کی سب رقوم کا حاصل جمع دریافت کرنا مقصود
 ہے جو جملہ

$$(1-n) + (2-n) + \dots + (n-n)$$

میں n کو $1+n$ سے لیکر n تک سب صحیح عددی قیمتیں دینے
 سے بشمول n اور $1+n$ کے حاصل ہوتی ہے۔
 شمار کنندہ کے اجزائے ضربی کو صعودی ترتیب میں لکھنے سے
 حاصل جمع مطلوبہ $\sum_{k=1}^n (1+n-k)$

$$= \frac{1}{2} \{ 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n + (1+n) \times \dots \times n \}$$

$$+ (1-n) + \dots + (1-n)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(1-n) + \dots + (1-n)}{1+n} \dots$$

$$= \frac{(1-n) + \dots + (2-n) + \dots + (n-n)}{1+n}$$

چونکہ جملہ زیر بحث 1 سے لیکر n تک n کی سب قیمتوں کے
 لئے صفر کے مساوی ہے، اس لئے مندرجہ بالا نتیجہ نمونہ ذیل
 بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\sum_{k=1}^n (1-n) + \dots + (2-n) + \dots + (n-n)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{(r+1)}$$

مثلاً نمبری ۲۹ (۱)
ذیل کے سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots + 5 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \quad (1) \\ & \dots\dots\dots + 6 \times 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \quad (2) \\ & \dots\dots\dots + 7 \times 6 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \quad (3) \\ & \dots\dots\dots + 8 \times 7 \times 6 + 7 \times 6 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \quad (4) \\ & \dots\dots\dots + 9 \times 8 \times 7 + 8 \times 7 \times 6 + 7 \times 6 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 \quad (5) \end{aligned}$$

ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کا مجموعہ ن رقموں تک
اور لاتنا ہی تک معلوم کرو۔

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} \quad (6)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} \quad (7)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{9 \times 8 \times 7} + \frac{1}{8 \times 7 \times 6} + \frac{1}{7 \times 6 \times 5} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} \quad (8)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{13 \times 12 \times 11} + \frac{1}{12 \times 11 \times 10} + \frac{1}{11 \times 10 \times 9} + \frac{1}{10 \times 9 \times 8} + \frac{1}{9 \times 8 \times 7} + \frac{1}{8 \times 7 \times 6} + \frac{1}{7 \times 6 \times 5} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} \quad (9)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{6}{5 \times 4 \times 3} + \frac{5}{4 \times 3 \times 2} + \frac{4}{3 \times 2 \times 1} \quad (10)$$

$$\dots\dots\dots + \frac{3}{6 \times 5 \times 4} + \frac{2}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} \quad (11)$$

$$\dots + \frac{4}{4 \times 5 \times 3} + \frac{5}{5 \times 4 \times 2} + \frac{3}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{1 \times 2 \times 1} \quad (12)$$

ذیل کے سلسلوں کی ن رتہوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$\dots + 2 \times 5 \times 3 + 3 \times 4 \times 2 + 2 \times 3 \times 1 \quad (13)$$

(14) $(1 - n) + (2 - n) + (3 - n) + \dots$
ان سلسلوں کی ن رتہوں کا حاصل جمع معلوم کرو جن کی
ن وین رتہیں حسب ذیل ہیں۔

$$(15) \quad n \quad (1 - n) \quad (16) \quad (n + 5) \quad (n + 4) \quad (n + 3) \quad (n + 2) \quad (n + 1)$$

$$(17) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} \quad (18) \quad \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 1}$$

$$(19) \quad \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 2n} \quad (20) \quad \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n}$$

(21) ثابت کرو کہ اشکالی اعداد کے ر وین رتبہ کی ن وین
رقم ن وین رتبہ کی ر وین رقم کے مساوی ہے۔

(22) اگر اشکالی اعداد کے ر وین رتبہ کی ن وین رقم
(ر-۲) وین رتبہ کی (ن+۲) وین رقم کے مساوی
ہو تو ثابت کرو کہ $n + 2 = 2$

(23) پہلے رتبہ سے لیکر ر وین رتبہ (بشمول ر وین) تک
کے کثیر فضلی اعداد کے مختلف جٹ لئے گئے ہیں اور ہر جٹ
میں رقوم کی تعداد ن ہے۔

ثابت کرو کہ ان سب رقوم کا حاصل جمع

۴ ۴ ۴ ۴ ۴ سے تعبیر کرتے ہیں
 اسی طرح سلسلہ بالا سے ہم بالترتیب تیسرے، چوتھے،
 پانچویں، فریقوں کے رتبوں کے سلسلے بنا سکتے ہیں۔ ان سلسلوں
 کی عام رقمیں بالترتیب ۴ ۴ ۴ ۴ ۴ ہوں گی
 ذیل کے سلسلوں

۴ ۴ ۴ ۴ ۴
 ۵ ۵ ۵ ۵ ۵
 ۶ ۶ ۶ ۶ ۶

۷ ۷ ۷ ۷ ۷
 ۸ ۸ ۸ ۸ ۸

کے بنانے کا جو قاعدہ ہے اس سے ظاہر ہے کہ کسی سلسلہ کی
 کوئی رقم اپنی رقم باقبل اور دائیں جانب نیچے کی رقم کو جمع
 کرنے سے بنتی ہے۔

مثلاً ۴ = ۴ + ۴ اور ۵ = ۴ + ۴ = ۴ + ۴ + ۴
 جمع کرنے سے چھٹک ۵ = ۴ + ۴ = ۴ + ۴ اس لئے

۴ = ۴ + ۴ + ۴ + ۴ + ۴

یعنی اسی طرح سے پہلے، دوسرے، تیسرے سلسلوں کی بجائے
 دوسرا تیسرا چوتھا سلسلہ لینے سے

۵ = ۴ + ۴ + ۴ + ۴ + ۴

اس کو سلسلہ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اس منزل تک عددی سر اسی ضابطہ کے مطابق بنتے ہیں جس کے مطابق کہ مسئلہ ثانی سے بنتے ہیں، اب ہم استقراء حسابیہ سے یہ ثابت کریں گے کہ یہ ضابطہ ہر صورت میں درست اور برقرار رہتا ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ اور } 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

اسی طرح اگر ہم پہلے سلسلہ کو $(n+1)$ دیں تک لینے کی بجائے دوسرے سلسلہ کو $(n+2)$ دیں سلسلہ تک لیں تو

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ اور } 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ اور } 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

اس سلسلہ کو سلسلہ بالا میں جمع کرنے سے چونکہ

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ اور } 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ اور } 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\text{لیکن } {}_1J_r \times \frac{1+n}{r} = {}_1J_r \times \left(1 + \frac{1+r-n}{r}\right) = {}_1J_r + {}_1J_{r-1}$$

$$\frac{(1+n)(1+n-1) \dots (1+n-n)}{r(1-r) \dots 3 \times 2 \times 1} =$$

$${}_1J_{1+n} =$$

پس ثابت ہوا کہ اگر یہ کلیہ $E_1 + E_2$ کے لئے درست ہو تو
 یہ $E_1 + E_2$ کے لئے بھی درست ہوتا ہے۔ لیکن ہم دیکھ
 چکے ہیں کہ یہ E_1 کے لئے درست ہے
 لہذا یہ E_2 کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذا قیاس، اسلئے
 یہ ہر صورت میں درست ہے چنے

$$\dots + \frac{r}{1} \Delta \frac{(r-\omega)(1-\omega)}{r \times 1} + \frac{r}{1} \Delta (1-\omega) + \frac{r}{1} = \omega$$

..... ۳۹۴ - لعل علی محمد،

کی ن رقوموں کا ماحصل جمع کے فرقوں کی رقوم میں معلوم

فرض کرو کہ سلسلہ ع، ع، ع، ع..... سلسلہ ذیل
د، د، د، د.....

کے فرقوں کے پہلے رتبہ کا سلسلہ :-

$$\text{تب } \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n} - \frac{0}{n}\right) + \left(\frac{0}{n} - \frac{-1}{n}\right) + \dots + \left(\frac{-n+1}{n} - \frac{-n}{n}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \dots$$

ہوگا۔

مثال۔ سلسلہ ذیل

$$12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100, \dots$$

کی عام رقم اور n رقموں کا مجموعہ معلوم کرو
 فرقوں کے متواتر رتبے یہ ہیں۔

$$28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84, 92, 100, \dots$$

$$28 \quad 36 \quad 44 \quad 52 \quad 60 \quad 68 \quad 76 \quad 84 \quad 92 \quad 100$$

$$6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\text{لہذا } n \text{ ویں رقم} = 12 + (n-1)28 + \frac{(n-1)(n-2)28}{2}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)6}{24}$$

$$= n^3 + 5n^2 + 6n$$

اب n رقموں کا حاصل جمع $n^3 + 5n^2 + 6n$ کی قیمت محسوب کرنے سے بھی معلوم ہو سکتا ہے، لیکن اگر ہم دفعہ ہذا کا ضابطہ استعمال کریں تو

$$\text{جمع} = 12n + \frac{n(n-1)28}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)6}{6}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)6}{24}$$

$$= \frac{n}{12} (3n^3 + 24n^2 + 69n + 44)$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{(1+n)} (3n^2 + 2n + 2)$$

۳۹۷۔ یہ امر قابل غور ہے کہ جمع کرنے کا یہ عمل صرف اُسی صورت میں کام آسکتا ہے جبکہ سلسلہ زیر بحث ایسا ہو کہ فرقوں کے متواتر رتبوں کے لئے سلسلے نکالنے میں ہم بالآخر ایک ایسے سلسلہ پر پہنچ سکیں جس کی سب رقیں باہم مساوی ہوں، یہ صورت ہمیشہ واقع ہوگی بشرطیکہ سلسلہ کی n ویں رقم n کا کوئی ناطق صحیح تفاعل ہو۔
آسانی کی خاطر ہم صرف تین ابعاد کے تفاعل پر بحث کریں گے اگرچہ ثبوت کا طریقہ بالکل عام ہے۔
فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) + (n+2) + \dots + 2n + 1 + 2 + 3 + \dots + n + 1 + 2 + \dots$$

جہاں $1 = 1$ ، $2 = 2$ ، $3 = 3$ ، $4 = 4$ ، $5 = 5$ ، $6 = 6$ ، $7 = 7$ ، $8 = 8$ ، $9 = 9$ ، $10 = 10$ ، $11 = 11$ ، $12 = 12$ ، $13 = 13$ ، $14 = 14$ ، $15 = 15$ ، $16 = 16$ ، $17 = 17$ ، $18 = 18$ ، $19 = 19$ ، $20 = 20$ ، $21 = 21$ ، $22 = 22$ ، $23 = 23$ ، $24 = 24$ ، $25 = 25$ ، $26 = 26$ ، $27 = 27$ ، $28 = 28$ ، $29 = 29$ ، $30 = 30$ ، $31 = 31$ ، $32 = 32$ ، $33 = 33$ ، $34 = 34$ ، $35 = 35$ ، $36 = 36$ ، $37 = 37$ ، $38 = 38$ ، $39 = 39$ ، $40 = 40$ ، $41 = 41$ ، $42 = 42$ ، $43 = 43$ ، $44 = 44$ ، $45 = 45$ ، $46 = 46$ ، $47 = 47$ ، $48 = 48$ ، $49 = 49$ ، $50 = 50$ ، $51 = 51$ ، $52 = 52$ ، $53 = 53$ ، $54 = 54$ ، $55 = 55$ ، $56 = 56$ ، $57 = 57$ ، $58 = 58$ ، $59 = 59$ ، $60 = 60$ ، $61 = 61$ ، $62 = 62$ ، $63 = 63$ ، $64 = 64$ ، $65 = 65$ ، $66 = 66$ ، $67 = 67$ ، $68 = 68$ ، $69 = 69$ ، $70 = 70$ ، $71 = 71$ ، $72 = 72$ ، $73 = 73$ ، $74 = 74$ ، $75 = 75$ ، $76 = 76$ ، $77 = 77$ ، $78 = 78$ ، $79 = 79$ ، $80 = 80$ ، $81 = 81$ ، $82 = 82$ ، $83 = 83$ ، $84 = 84$ ، $85 = 85$ ، $86 = 86$ ، $87 = 87$ ، $88 = 88$ ، $89 = 89$ ، $90 = 90$ ، $91 = 91$ ، $92 = 92$ ، $93 = 93$ ، $94 = 94$ ، $95 = 95$ ، $96 = 96$ ، $97 = 97$ ، $98 = 98$ ، $99 = 99$ ، $100 = 100$ ، $101 = 101$ ، $102 = 102$ ، $103 = 103$ ، $104 = 104$ ، $105 = 105$ ، $106 = 106$ ، $107 = 107$ ، $108 = 108$ ، $109 = 109$ ، $110 = 110$ ، $111 = 111$ ، $112 = 112$ ، $113 = 113$ ، $114 = 114$ ، $115 = 115$ ، $116 = 116$ ، $117 = 117$ ، $118 = 118$ ، $119 = 119$ ، $120 = 120$ ، $121 = 121$ ، $122 = 122$ ، $123 = 123$ ، $124 = 124$ ، $125 = 125$ ، $126 = 126$ ، $127 = 127$ ، $128 = 128$ ، $129 = 129$ ، $130 = 130$ ، $131 = 131$ ، $132 = 132$ ، $133 = 133$ ، $134 = 134$ ، $135 = 135$ ، $136 = 136$ ، $137 = 137$ ، $138 = 138$ ، $139 = 139$ ، $140 = 140$ ، $141 = 141$ ، $142 = 142$ ، $143 = 143$ ، $144 = 144$ ، $145 = 145$ ، $146 = 146$ ، $147 = 147$ ، $148 = 148$ ، $149 = 149$ ، $150 = 150$ ، $151 = 151$ ، $152 = 152$ ، $153 = 153$ ، $154 = 154$ ، $155 = 155$ ، $156 = 156$ ، $157 = 157$ ، $158 = 158$ ، $159 = 159$ ، $160 = 160$ ، $161 = 161$ ، $162 = 162$ ، $163 = 163$ ، $164 = 164$ ، $165 = 165$ ، $166 = 166$ ، $167 = 167$ ، $168 = 168$ ، $169 = 169$ ، $170 = 170$ ، $171 = 171$ ، $172 = 172$ ، $173 = 173$ ، $174 = 174$ ، $175 = 175$ ، $176 = 176$ ، $177 = 177$ ، $178 = 178$ ، $179 = 179$ ، $180 = 180$ ، $181 = 181$ ، $182 = 182$ ، $183 = 183$ ، $184 = 184$ ، $185 = 185$ ، $186 = 186$ ، $187 = 187$ ، $188 = 188$ ، $189 = 189$ ، $190 = 190$ ، $191 = 191$ ، $192 = 192$ ، $193 = 193$ ، $194 = 194$ ، $195 = 195$ ، $196 = 196$ ، $197 = 197$ ، $198 = 198$ ، $199 = 199$ ، $200 = 200$ ، $201 = 201$ ، $202 = 202$ ، $203 = 203$ ، $204 = 204$ ، $205 = 205$ ، $206 = 206$ ، $207 = 207$ ، $208 = 208$ ، $209 = 209$ ، $210 = 210$ ، $211 = 211$ ، $212 = 212$ ، $213 = 213$ ، $214 = 214$ ، $215 = 215$ ، $216 = 216$ ، $217 = 217$ ، $218 = 218$ ، $219 = 219$ ، $220 = 220$ ، $221 = 221$ ، $222 = 222$ ، $223 = 223$ ، $224 = 224$ ، $225 = 225$ ، $226 = 226$ ، $227 = 227$ ، $228 = 228$ ، $229 = 229$ ، $230 = 230$ ، $231 = 231$ ، $232 = 232$ ، $233 = 233$ ، $234 = 234$ ، $235 = 235$ ، $236 = 236$ ، $237 = 237$ ، $238 = 238$ ، $239 = 239$ ، $240 = 240$ ، $241 = 241$ ، $242 = 242$ ، $243 = 243$ ، $244 = 244$ ، $245 = 245$ ، $246 = 246$ ، $247 = 247$ ، $248 = 248$ ، $249 = 249$ ، $250 = 250$ ، $251 = 251$ ، $252 = 252$ ، $253 = 253$ ، $254 = 254$ ، $255 = 255$ ، $256 = 256$ ، $257 = 257$ ، $258 = 258$ ، $259 = 259$ ، $260 = 260$ ، $261 = 261$ ، $262 = 262$ ، $263 = 263$ ، $264 = 264$ ، $265 = 265$ ، $266 = 266$ ، $267 = 267$ ، $268 = 268$ ، $269 = 269$ ، $270 = 270$ ، $271 = 271$ ، $272 = 272$ ، $273 = 273$ ، $274 = 274$ ، $275 = 275$ ، $276 = 276$ ، $277 = 277$ ، $278 = 278$ ، $279 = 279$ ، $280 = 280$ ، $281 = 281$ ، $282 = 282$ ، $283 = 283$ ، $284 = 284$ ، $285 = 285$ ، $286 = 286$ ، $287 = 287$ ، $288 = 288$ ، $289 = 289$ ، $290 = 290$ ، $291 = 291$ ، $292 = 292$ ، $293 = 293$ ، $294 = 294$ ، $295 = 295$ ، $296 = 296$ ، $297 = 297$ ، $298 = 298$ ، $299 = 299$ ، $300 = 300$ ، $301 = 301$ ، $302 = 302$ ، $303 = 303$ ، $304 = 304$ ، $305 = 305$ ، $306 = 306$ ، $307 = 307$ ، $308 = 308$ ، $309 = 309$ ، $310 = 310$ ، $311 = 311$ ، $312 = 312$ ، $313 = 313$ ، $314 = 314$ ، $315 = 315$ ، $316 = 316$ ، $317 = 317$ ، $318 = 318$ ، $319 = 319$ ، $320 = 320$ ، $321 = 321$ ، $322 = 322$ ، $323 = 323$ ، $324 = 324$ ، $325 = 325$ ، $326 = 326$ ، $327 = 327$ ، $328 = 328$ ، $329 = 329$ ، $330 = 330$ ، $331 = 331$ ، $332 = 332$ ، $333 = 333$ ، $334 = 334$ ، $335 = 335$ ، $336 = 336$ ، $337 = 337$ ، $338 = 338$ ، $339 = 339$ ، $340 = 340$ ، $341 = 341$ ، $342 = 342$ ، $343 = 343$ ، $344 = 344$ ، $345 = 345$ ، $346 = 346$ ، $347 = 347$ ، $348 = 348$ ، $349 = 349$ ، $350 = 350$ ، $351 = 351$ ، $352 = 352$ ، $353 = 353$ ، $354 = 354$ ، $355 = 355$ ، $356 = 356$ ، $357 = 357$ ، $358 = 358$ ، $359 = 359$ ، $360 = 360$ ، $361 = 361$ ، $362 = 362$ ، $363 = 363$ ، $364 = 364$ ، $365 = 365$ ، $366 = 366$ ، $367 = 367$ ، $368 = 368$ ، $369 = 369$ ، $370 = 370$ ، $371 = 371$ ، $372 = 372$ ، $373 = 373$ ، $374 = 374$ ، $375 = 375$ ، $376 = 376$ ، $377 = 377$ ، $378 = 378$ ، $379 = 379$ ، $380 = 380$ ، $381 = 381$ ، $382 = 382$ ، $383 = 383$ ، $384 = 384$ ، $385 = 385$ ، $386 = 386$ ، $387 = 387$ ، $388 = 388$ ، $389 = 389$ ، $390 = 390$ ، $391 = 391$ ، $392 = 392$ ، $393 = 393$ ، $394 = 394$ ، $395 = 395$ ، $396 = 396$ ، $397 = 397$ ، $398 = 398$ ، $399 = 399$ ، $400 = 400$ ، $401 = 401$ ، $402 = 402$ ، $403 = 403$ ، $404 = 404$ ، $405 = 405$ ، $406 = 406$ ، $407 = 407$ ، $408 = 408$ ، $409 = 409$ ، $410 = 410$ ، $411 = 411$ ، $412 = 412$ ، $413 = 413$ ، $414 = 414$ ، $415 = 415$ ، $416 = 416$ ، $417 = 417$ ، $418 = 418$ ، $419 = 419$ ، $420 = 420$ ، $421 = 421$ ، $422 = 422$ ، $423 = 423$ ، $424 = 424$ ، $425 = 425$ ، $426 = 426$ ، $427 = 427$ ، $428 = 428$ ، $429 = 429$ ، $430 = 430$ ، $431 = 431$ ، $432 = 432$ ، $433 = 433$ ، $434 = 434$ ، $435 = 435$ ، $436 = 436$ ، $437 = 437$ ، $438 = 438$ ، $439 = 439$ ، $440 = 440$ ، $441 = 441$ ، $442 = 442$ ، $443 = 443$ ، $444 = 444$ ، $445 = 445$ ، $446 = 446$ ، $447 = 447$ ، $448 = 448$ ، $449 = 449$ ، $450 = 450$ ، $451 = 451$ ، $452 = 452$ ، $453 = 453$ ، $454 = 454$ ، $455 = 455$ ، $456 = 456$ ، $457 = 457$ ، $458 = 458$ ، $459 = 459$ ، $460 = 460$ ، $461 = 461$ ، $462 = 462$ ، $463 = 463$ ، $464 = 464$ ، $465 = 465$ ، $466 = 466$ ، $467 = 467$ ، $468 = 468$ ، $469 = 469$ ، $470 = 470$ ، $471 = 471$ ، $472 = 472$ ، $473 = 473$ ، $474 = 474$ ، $475 = 475$ ، $476 = 476$ ، $477 = 477$ ، $478 = 478$ ، $479 = 479$ ، $480 = 480$ ، $481 = 481$ ، $482 = 482$ ، $483 = 483$ ، $484 = 484$ ، $485 = 485$ ، $486 = 486$ ، $487 = 487$ ، $488 = 488$ ، $489 = 489$ ، $490 = 490$ ، $491 = 491$ ، $492 = 492$ ، $493 = 493$ ، $494 = 494$ ، $495 = 495$ ، $496 = 496$ ، $497 = 497$ ، $498 = 498$ ، $499 = 499$ ، $500 = 500$ ، $501 = 501$ ، $502 = 502$ ، $503 = 503$ ، $504 = 504$ ، $505 = 505$ ، $506 = 506$ ، $507 = 507$ ، $508 = 508$ ، $509 = 509$ ، $510 = 510$ ، $511 = 511$ ، $512 = 512$ ، $513 = 513$ ، $514 = 514$ ، $515 = 515$ ، $516 = 516$ ، $517 = 517$ ، $518 = 518$ ، $519 = 519$ ، $520 = 520$ ، $521 = 521$ ، $522 = 522$ ، $523 = 523$ ، $524 = 524$ ، $525 = 525$ ، $526 = 526$ ، $527 = 527$ ، $528 = 528$ ، $529 = 529$ ، $530 = 530$ ، $531 = 531$ ، $532 = 532$ ، $533 = 533$ ، $534 = 534$ ، $535 = 535$ ، $536 = 536$ ، $537 = 537$ ، $538 = 538$ ، $539 = 539$ ، $540 = 540$ ، $541 = 541$ ، $542 = 542$ ، $543 = 543$ ، $544 = 544$ ، $545 = 545$ ، $546 = 546$ ، $547 = 547$ ، $548 = 548$ ، $549 = 549$ ، $550 = 550$ ، $551 = 551$ ، $552 = 552$ ، $553 = 553$ ، $554 = 554$ ، $555 = 555$ ، $556 = 556$ ، $557 = 557$ ، $558 = 558$ ، $559 = 559$ ، $560 = 560$ ، $561 = 561$ ، $562 = 562$ ، $563 = 563$ ، $564 = 564$ ، $565 = 565$ ، $566 = 566$ ، $567 = 567$ ، $568 = 568$ ، $569 = 569$ ، $570 = 570$ ، $571 = 571$ ، $572 = 572$ ، $573 = 573$ ، $574 = 574$ ، $575 = 575$ ، $576 = 576$ ، $577 = 577$ ، $578 = 578$ ، $579 = 579$ ، $580 = 580$ ، $581 = 581$ ، $582 = 582$ ، $583 = 583$ ، $584 = 584$ ، $585 = 585$ ، $586 = 586$ ، $587 = 587$ ، $588 = 588$ ، $589 = 589$ ، $590 = 590$ ، $591 = 591$ ، $592 = 592$ ، $593 = 593$ ، $594 = 594$ ، $595 = 595$ ، $596 = 596$ ، $597 = 597$ ، $598 = 598$ ، $599 = 599$ ، $600 = 600$ ، $601 = 601$ ، $602 = 602$ ، $603 = 603$ ، $604 = 604$ ، $605 = 605$ ، $606 = 606$ ، $607 = 607$ ، $608 = 608$ ، $609 = 609$ ، $610 = 610$ ، $611 = 611$ ، $612 = 612$ ، $613 = 613$ ، $614 = 614$ ، $615 = 615$ ، $616 = 616$ ، $617 = 617$ ، $618 = 618$ ، $619 = 619$ ، $620 = 620$ ، $621 = 621$ ، $622 = 622$ ، $623 = 623$ ، $624 = 624$ ، $625 = 625$ ، $626 = 626$ ، $627 = 627$ ، $628 = 628$ ، $629 = 629$ ، $630 = 630$ ، $631 = 631$ ، $632 = 632$ ، $633 = 633$ ، $634 = 634$ ، $635 = 635$ ، $636 = 636$ ، $637 = 637$ ، $638 = 638$ ، $639 = 639$ ، $640 = 640$ ، $641 = 641$ ، $642 = 642$ ، $643 = 643$ ، $644 = 644$ ، $645 = 645$ ، $646 = 646$ ، $647 = 647$ ، $648 = 648$ ، $649 = 649$ ، $650 = 650$ ، $651 = 651$ ، $652 = 652$ ، $653 = 653$ ، $654 = 654$ ، $655 = 655$ ، $656 = 656$ ، $657 = 657$ ، $658 = 658$ ، $659 = 659$ ، $660 = 660$ ، $661 = 661$ ، $662 = 662$ ، $663 = 663$ ، $664 = 664$ ، $665 = 665$ ، $666 = 666$ ، $667 = 667$ ، $668 = 668$ ، $669 = 669$ ، $670 = 670$ ، $671 = 671$ ، $672 = 672$ ، $673 = 673$ ، $674 = 674$ ، $675 = 675$ ، $676 = 676$ ، $677 = 677$ ، $678 = 678$ ، $679 = 679$ ، $680 = 680$ ، $681 = 681$ ، $682 = 682$ ، $683 = 683$ ، $684 = 684$ ، $685 = 685$ ، $686 = 686$ ، $687 = 687$ ، $688 = 688$ ، $689 = 689$ ، $690 = 690$ ، $691 = 691$ ، $692 = 692$ ، $693 = 693$ ، $694 = 694$ ، $695 = 695$ ، $696 = 696$ ، $697 = 697$ ، $698 = 698$ ، $699 = 699$ ، $700 = 700$ ، $701 = 701$ ، $702 = 702$ ، $703 = 703$ ، $704 = 704$ ، $705 = 705$ ، $706 = 706$ ، $707 = 707$ ، $708 = 708$ ، $709 = 709$ ، $710 = 710$ ، $711 = 711$ ، $712 = 712$ ، $713 = 713$ ، $714 = 714$ ، $715 = 715$ ، $716 = 716$ ، $717 = 717$ ، $718 = 718$ ، $719 = 719$ ، $720 = 720$ ، $721 = 721$ ، $722 = 722$ ، $723 = 723$ ، $724 = 724$ ، $725 = 725$ ، $726 = 726$ ، $727 = 727$ ، $728 = 728$ ، $729 = 729$ ، $730 = 730$ ، $731 = 731$ ، $732 = 732$ ، $733 = 733$ ، $734 = 734$ ، $735 = 735$ ، $736 = 736$ ، $737 = 737$ ، $738 = 738$ ، $739 = 739$ ، $740 = 740$ ، $741 = 741$ ، $742 = 742$ ، $743 = 743$ ، $744 = 744$ ، $745 = 745$ ، $746 = 746$ ، $747 = 747$ ، $748 = 748$ ، $749 = 749$ ، $750 = 750$ ، $751 = 751$ ، $752 = 752$ ، $753 = 753$ ، $754 = 754$ ، $755 = 755$ ، $756 = 756$ ، $757 = 757$ ، $758 = 758$ ، $759 = 759$ ، $760 = 760$ ، $761 = 761$ ، $762 = 762$ ، $763 = 763$ ، $764 = 764$ ، $765 = 765$ ، $766 = 766$ ، $767 = 767$ ، $768 = 768$ ، $769 = 769$ ، $770 = 770$ ، $771 = 771$ ، $772 = 772$ ، $773 = 773$ ، $774 = 774$ ، $775 = 775$ ، $776 = 776$ ، $777 = 777$ ، $778 = 778$ ، $779 = 779$ ، $780 = 780$ ، $781 = 781$ ، $782 = 782$ ، $783 = 783$ ، $784 = 784$ ، $785 = 785$ ، $786 = 786$ ، $787 = 787$ ، $788 = 788$ ، $789 = 789$ ، $790 = 790$ ، $791 = 791$ ، $792 = 792$ ، $793 = 793$ ، $794 = 794$ ، $795 = 795$ ، $796 = 796$ ، $797 = 797$ ، $798 = 798$ ، $799 = 799$ ، $800 = 800$ ، $801 = 801$ ، $802 = 802$ ، $803 = 803$ ، $804 = 804</$

$$\text{ج (۱- لا)} = \text{ب} + (\text{ب} - \text{ا}) + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + \dots$$

$$\dots + (\text{ب} - \text{ا}) + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + \dots$$

$$= \text{ب} + \text{ب} + \text{لا} + \text{ب} + \text{لا} + \dots + \text{ب} + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + \dots$$

یہاں $\text{ب} = \text{ب} - \text{ا} + \text{ا}$ یعنی ب کا بعد ن میں ق ۔
آخری سلسلہ کو ا ۔ لا سے ضرب دینے سے

$$\text{ج (۱- لا)} = \text{ب} + (\text{ب} - \text{ا}) + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + \dots$$

$$\dots + (\text{ب} - \text{ا}) + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + \dots$$

$$= \text{ب} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \dots + \text{ج} + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + (\text{ب} - \text{ا}) + \text{لا} + \dots$$

$$+ \text{لا} + \text{لا} + \dots$$

یہاں $\text{ج} = \text{ب} - \text{ا}$ ، یعنی ج کے بعد ن میں ق ۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ زیر بحث کو با تواتر ا ۔ لا سے ضرب دینے سے پہلے، دوسرے، تیسرے، حاصل ضربوں

میں لا کے جو سر حاصل ہوں گے وہ بالترتیب سروں

کے پہلے، دوسرے، تیسرے فرقوں کے رتبوں کی عام رقموں کے جداگانہ مساوی ہوں گے۔

حسب مفروض ا ، ن کا ایک ق ابعاد والا ناطق صحیح

تفاعل ہے اس لئے (۱-۹) سے ق بار ضرب دینے سے ہمیں ایک ایسا سلسلہ حاصل ہوگا کہ سوائے شروع کی اور آخر کی ق رقموں کے سلسلہ کی باقی ماندہ رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں گی جن میں سے ہر ایک کا سر وہی ہوگا۔ (دیکھو دفعہ ۳۹۷)

پس ج (۱-۹) = ک (۹ + ۹^۱ + + ۹^{۱۰}) + ف (۹)
جہاں ک ایک مستقل ہے اور ف (۹) حاصل ضرب میں ابتدائی ق اور آخری ق رقموں کو تعبیر کرتا ہے۔

$$ج (۱-۹) = \frac{ک (۹ - ۹^{۱۰})}{۹ - ۱} + ف (۹)$$

$$یعنی ج = \frac{ک (۹ - ۹^{۱۰}) + (۹ - ۱) ف (۹)}{(۹ - ۱)}$$

پس سلسلہ زیر بحث ایک متوالی سلسلہ ہے جسکا پیمانہ ربط

$$(۱-۹)^{۱۰} \text{ ہے [دیکھو دفعہ ۲۲۵]}$$

اگر عام رقم نہ دی ہوئی ہو تو ل کے ابعاد دفعہ ۳۹ کے طریقہ سے آسانی معلوم ہو سکتے ہیں۔
مثال - سلسلہ ذیل

$$۳ + ۵ + ۹ + ۱۵ + ۲۲ + ۳۲ + ۴۵ + ۹۰$$

کا کوئی تفاعل معلوم کرو۔
سروں سے متواتر فرقوں کے رتبے بنانے سے ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{array}{cccccc} ۱۰ & ۸ & ۶ & ۴ & ۲ & \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ & ۲ & \end{array}$$

پس لے 'ن' کا دو ابعاد والا منطق صحیح تفاعل ہے اور
اس لئے ربط کا پیمانہ (۱-۱) ہے۔ لہذا

$$\begin{aligned} \text{ج} = ۳ + ۵\text{لا} + ۹\text{لا}^۲ + ۱۵\text{لا}^۳ + ۲۲\text{لا}^۴ + ۲۲\text{لا}^۵ + \dots \\ \text{۲-لا ج} = -۹\text{لا} - ۵\text{لا}^۲ - ۲۴\text{لا}^۳ - ۴۵\text{لا}^۴ - ۶۹\text{لا}^۵ - \dots \\ \text{۳-لا ج} = ۹\text{لا} + ۱۵\text{لا}^۲ + ۲۴\text{لا}^۳ + ۴۵\text{لا}^۴ + \dots \\ \text{-لا ج} = -۲\text{لا} - ۵\text{لا}^۲ - ۹\text{لا}^۳ - \dots \end{aligned}$$

جمع کرنے سے (۱-۱) ج = ۳ - ۳لا + ۳لا^۲

$$\text{ج} = \frac{۳ - ۳لا + ۳لا^۲}{(۱-لا)^۳}$$

۳۹۹۔ چوبیسویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی متوالی
سلسلہ کا تفاعل تکوینی ایک ناظمی کسر ہوتی ہے جس کا
نسب نامہ پیمانہ ربط ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس پیمانہ ربط کو
اجزائے ضربی (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) ج (۱-۱) میں
تحويل کیا جاسکتا ہے، تب تفاعل تکوینی ذیل کی شکل کی
جزوی کسر

$$\dots + \frac{\text{ج}}{۱-ج\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{۱-ب\text{لا}} + \frac{\text{ا}}{۱-ا\text{لا}}$$

میں علیحدہ علیحدہ کیا جاسکتا ہے، اب ان کسروں میں سے

پس دوسرے فرق کے رتبے ہندی سلسلہ میں ہیں جبکی مشترک نسبت ۳ ہے، اس لئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عام رقم $6 = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1$ ج ہے
 مستقلات ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کے مساوی رکھو

$$تب 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

ان مساواتوں سے $1 = 1$ ، $2 = 3$ ، $3 = 6$ ، $4 = 10$ ، $5 = 15$ ، $6 = 21$ ، $7 = 28$ ، $8 = 36$ ، $9 = 45$ ، $10 = 55$

$$لہذا 6 = 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3 + 2 + 1 = 6$$

۴۰۲۔ متوالی سلسلوں کی جو مثالیں ہم نے اوپر بیان کی ہیں وہ سب کی سب ایسی ہیں کہ ان سے متواتر فرقوں کے رتبوں کے سلسلے بنا کر ہم بالآخر ایک ایسے سلسلہ پر پہنچ جاتے ہیں جس کی رقم کی تعبیر کا قانون محض دیکھنے سے معلوم ہو جاتا ہے، اس سے ہم ابتدائی سلسلہ کی 'ن' دین رقم کے لئے عام جملہ معلوم کر سکتے ہیں۔
 لیکن اگر متوالی سلسلہ چند ایسے ہندی سلسلوں کے حامل جمع کے مساوی ہو جبکی مشترک نسبتیں بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہوں تو ظاہر ہے کہ متوالی سلسلہ کی عام رقم

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

کی شکل کی ہوگی اور اس لئے فرقوں کے متواتر رتبوں میں عام رقم اس شکل کی ہوگی یعنی فرقوں کے سب رتبوں میں سلسلے اسی کلیہ کے تحت بیٹے جس کے تحت ابتدائی سلسلہ بنا ہے۔ اس صورت میں سلسلہ کی عام رقم معلوم کرنے کے لئے ہمیں زیادہ عام طریقہ اختیار کرنا پڑے گا جس کی

تشریح جو بیسویں باب میں ہو چکی ہے۔ لیکن جب سر تعداد بڑے ہوں تو ربط کا پیمانہ بہت سے پر مشقت حسابی عمل کے بعد حاصل ہوتا ہے۔ پس عام طور پر متواتر فرقوں کے رتبوں کے چند سلسلے لکھ لینا زیادہ مناسب ہوتا ہے تاکہ یہ معلوم ہو سکے کہ آیا کہ کسی ایسے سلسلہ پر پہنچنا ممکن ہے جس کی رقوم کی تفسیر کا قانون از خود بین اور ظاہر ہو۔

۳۰۳۔ مذکورہ بالا اصولوں کی مزید توضیح کے لئے ہم چند مثالیں ذیل میں حرج کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ سلسلہ ذیل

$$\dots + \frac{1}{3} \times \frac{11}{5 \times 7} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{7 \times 9} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{9 \times 11} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{11 \times 13}$$

کی ن رقوم کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$\frac{1}{3} \times \frac{3+n^2}{(1+n)n} = \text{یہاں } 6$$

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{n} = \frac{3+n^2}{(1+n)n}$$

$$\text{پس } 1 = 3, \text{ ب} = 1$$

$$\text{اس لئے } 6 = \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{1+n} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+n} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{n}$$

$$\text{لہذا حاصل جمع مطلوبہ} = \text{ج} = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+n}$$

مثال ۲۔ سلسلہ ذیل

$$\dots + \frac{4}{15 \times 11 \times 7 \times 3} + \frac{5}{11 \times 7 \times 3} + \frac{3}{7 \times 3} + \frac{1}{3}$$

کی ن رقوم کا حاصل جمع معلوم کرو۔

کی 'ن' دیں رقم معلوم کرتے ہیں جو 'ن' + ۳ + 'ن' + ۲ ہے
نیز سلسلہ

..... ۱، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱، ۰

کی 'ن' دیں رقم ۲ 'ن' + ۶ 'ن' + ۱ ہے۔

اسلئے عی = (۱ + 'ن') (۱ + 'ن') {۲ 'ن' (۳ + 'ن') + ۱}

۲ 'ن' (۱ + 'ن') (۲ + 'ن') (۳ + 'ن') (۱ + 'ن') (۲ + 'ن')

∴ ج = $\frac{۲}{۵}$ 'ن' (۱ + 'ن') (۲ + 'ن') (۳ + 'ن') (۲ + 'ن')

+ $\frac{۱}{۳}$ 'ن' (۱ + 'ن') (۲ + 'ن') (۳ + 'ن') - ۲

مثال ۴۔ سلسلہ ذیل

..... ۲۲ × ۳۰ + ۱۶ × ۲۰ + ۸ × ۱۲ + ۳ × ۶ + ۲ × ۲

کی 'ن' رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

سلسلہ ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، کی 'ن' دیں رقم 'ن' + 'ن' ہے

لہذا عی = (۲ + 'ن') (۲ + 'ن')

اب فرض کرو کہ (۲ + 'ن') = ۲ = (۱ + 'ن' + 'ب' + 'ج') (ج = ۲)

- { (۱ - 'ن') + (۱ - 'ن') + 'ب' (۱ - 'ن') + 'ج' } × ۳ - ۱

۳ - ۱ پر تقسیم کرنے اور 'ن' کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

۲ = ۲ - ۱ + 'ب' + ۲ = ۲ - 'ج' - ۱ + 'ب' + = ۲

∴ ۲ = ۲ - 'ب' - ۲ = 'ج' = ۴

∴ ع = (۲ - 'ن' + ۲ - 'ن' + ۴) (۲ - 'ن' + ۲ - 'ن' + ۴) - ۲ { ۴ + (۱ - 'ن') ۲ - (۱ - 'ن') ۲ } - ۱

اور ج = (۲ - 'ن' + ۲ - 'ن' + ۴) (۴ + 'ن' + ۴) = ۴ - ۲ (۲ + 'ن' - 'ن') - ۱ + ۲

امثلہ نمبری ۲۹ (ب)

ذیل کے سلسلوں کی ن دیں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

- ۱۔ ۱۱۳، ۸۰، ۵۲، ۳۰، ۱۴، ۳
- ۲۔ ۱۹۸، ۱۳۰، ۹۲، ۵۴، ۲۶، ۸
- ۳۔ ۲۵۲، ۱۵۰، ۸۰، ۳۶، ۱۲، ۲
- ۴۔ ۳۳۲، ۲۰۰، ۶۴، ۱۶، ۸
- ۵۔ ۳۳۶، ۱۸۹، ۹۶، ۴۲، ۱۴، ۳

ذیل کے سلسلوں کے نمونی تفاعل معلوم کرو

- ۶۔ + ۳۱ لا + ۲۱ لا + ۱۳ لا + ۷ لا + ۳ لا + ۱ لا
- ۷۔ + ۵۳ لا + ۳۵ لا + ۲۰ لا + ۹ لا + ۲ لا + ۱ لا
- ۸۔ + ۳۷ لا + ۲۶ لا + ۱۷ لا + ۱۰ لا + ۵ لا + ۲ لا
- ۹۔ + ۱۱ لا - ۹ لا + ۷ لا - ۵ لا + ۲ لا - ۱ لا
- ۱۰۔ + ۵ لا + ۴ لا + ۳ لا + ۲ لا + ۱ لا

ذیل کے لانتباہی سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

- ۱۱۔ + $\frac{۵ \times ۴}{۳}$ + $\frac{۴ \times ۳}{۳}$ + $\frac{۳ \times ۲}{۲}$ + $\frac{۲ \times ۱}{۱}$
- ۱۲۔ + $\frac{۲}{۵}$ - $\frac{۲}{۵}$ + $\frac{۲}{۵}$ - $\frac{۲}{۵}$ + $\frac{۲}{۵}$ - $\frac{۲}{۵}$

ذیل کے سلسلوں کی عام رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

- ۱۳۔ ۱۰۳، ۵۴، ۲۹، ۱۶، ۹
- ۱۴۔ ۱۶۷، ۸۹، ۳۹، ۱۱، ۱، ۳

.....'۸۶'۳۱'۱۲'۵'۲	-۱۵
.....'۱۹۳'۸۰'۲۹'۸'۱'۰'۱	-۱۶
.....'۷۵۵'۲۶۲'۹۴'۲۵'۱۳'۴	-۱۷
ذیل کے سلسلوں میں سے ہر ایک کی ترقیوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔	
.....+ ^۲ ۵+ ^۳ ۴+ ^۲ ۳+ ^۱ ۲+۱	-۱۸
.....+ ^۲ ۱۵+ ^۳ ۱۰+ ^۲ ۶+ ^۱ ۳+۱	-۱۹
+ ^۱ / _۲ × ^۶ / _{۵×۲} + ^۱ / _۳ × ^۵ / _{۲×۳} + ^۱ / _۴ × ^۴ / _{۳×۴} + ^۱ / _۵ × ^۳ / _{۴×۵}	-۲۰
.....+ ^۲ / _{۶×۵} × ^۲ / _۵ + ^۲ / _{۵×۲} × ^۲ / _۲ + ^۲ / _{۲×۳} × ^۲ / _۳ + ^۲ / _{۳×۴} × ^۲ / _۴	-۲۱
.....+۲۲×۲۵+۲۱×۲۴+۲۰×۱۵+۱۱×۸+۲×۲	-۲۲
.....+۲۱×۲۵+۲۱×۱۶+۱۳×۹+۶×۲+۲×۱	-۲۳
.....+۸۱×۵+۵۳×۲+۲۱×۳+۱۵×۲+۵×۱	-۲۴
.....+ ^۲ / _{۹×۷×۵×۲×۱} + ^۲ / _{۷×۵×۲×۱} + ^۲ / _{۵×۲×۱} + ^۱ / _{۲×۱}	-۲۵
.....+ ^۲ / _۹ × ^۲ / _۲ + ^۲ / _۵ × ^۲ / _۳ + ^۲ / _۲ × ^۲ / _۴ + ^۲ / _۳ × ^۲ / _۱	-۲۶
.....+۲۲×۱۶+۱۶×۱۱+۸×۶+۲×۲+۲×۲	-۲۷
.....×۲×۹+ ^۲ / _۲ ×۶+ ^۲ / _۲ ×۵+ ^۲ / _۲ ×۲+۲×۱	-۲۸
.....+ ^{۷×۵×۲×۱} / _{۱×۸×۶×۲×۲} + ^{۵×۲×۱} / _{۸×۶×۲×۲} + ^{۲×۱} / _{۶×۲×۲} + ^۱ / _{۲×۲}	-۲۹
.....+ ^۲ / _{۵×۲} × ^{۱۶} / _۲ + ^۲ / _{۲×۲} × ^{۱۰} / _۲ + ^۲ / _{۲×۲} × ^۵ / _۲ + ^۲ / _{۲×۱}	-۳۰

$$\begin{aligned}
 & \dots + \frac{1}{2} \times \frac{6}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{3 \times 2 \times 1} \quad - ۳۱ \\
 & \dots + \frac{19}{4} + \frac{11}{5} + \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \quad - ۳۲ \\
 & \frac{1}{12} \times \frac{49}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{8} \times \frac{28}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{7} \times \frac{19}{3 \times 2 \times 1} \quad - ۳۳ \\
 & \dots + \frac{1}{32} \times \frac{52}{6 \times 5 \times 4} +
 \end{aligned}$$

۴-۴۔ بہت سے سلسلے ایسے ہیں جو کسی خاص کلیہ کے ماتحت جمع نہیں کئے جاسکتے۔ بعض اوقات متذکرہ بالا قاعدوں میں مناسب تغیر قبہ ل کر نا کافی ہوتا ہے بعض صورتوں میں جمع کا عمل چند معلومہ سلسلوں (مثلاً مسئلہ ثنائی کا سلسلہ، لوکارنی سلسلہ، قوت غا سلسلہ) کے خواص پر مبنی ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ ذیل کے لامتناہی سلسلہ

$$\dots + \frac{48}{5} + \frac{50}{7} + \frac{28}{9} + \frac{12}{11} + \frac{2}{13}$$

کا حاصل جمع معلوم کرو۔

سلسلہ ۲، ۱۲، ۲۸، ۵۰، ۷۸، کی ن ویں رقم ۲ + ن + ن - ۲ ہے

$$\text{اسلئے عن} = \frac{۲ + ن + ن - ۲}{ن} = \frac{۲ + ن(۱ - ۱) + ۲}{ن}$$

$$= \frac{۲}{ن} - \frac{۲}{۱ - ن} + \frac{۳}{۲ - ن} =$$

ن کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، کے برابر فرض کرنے سے

$$\frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} = 6, \quad \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + 3 = 6, \quad \frac{2}{x} - 4 = 6$$

اور علیٰ ہذا تقیاس

$$\text{اس سے ج } 2 + 0 = (1 - 0) \cdot 2 - 0 + 0 = 2$$

$$\text{مثال ۲۔ اگر } (1 + x) = 0 \text{ ج } 1 + x = 0 \text{ ج } 1 + x = 0 \text{ ج } 1 + x = 0$$

$$\text{تو ا ج } 1 + x = 0 \text{ ج } 1 + x = 0 \text{ ج } 1 + x = 0 \text{ ج } 1 + x = 0$$

دفعہ ۳۹۸ کی طرح ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

$$\text{نیز ج } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

$$\text{ان دونوں نتیجوں کو باہم ضرب دو تب سلسلہ زیر بحث } \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\text{کی بنیے } \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 - x)} \text{ کی تفصیل میں } 1 - x^2 \text{ کے سر کے مساوی}$$

$$\text{ہے یعنی اس تفصیل کی وہ قسمیں جن سے } 1 - x^2 \text{ حاصل ہو سکتا ہے وہ}$$

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{نہ دیا ہوا سلسلہ } = \frac{1 + x}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

لہذا دیا ہوا سلسلہ = لا کا سر $\frac{1}{(1-1^2)(1-1^4)}$ کی تفصیل میں

$$= لا کا سر \frac{1}{1-1^2} - \frac{1}{1-1^4} \text{ کی تفصیل میں}$$

$$= \frac{1+1^2}{1-1^2}$$

مثال ۴۔ اگر سلسلوں

$$1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^4}{4} + \frac{1^6}{6} + \dots + \frac{1^2}{2} + \frac{1^4}{4} + \frac{1^6}{6} + \dots$$

$$+ \frac{1^2}{2} + \frac{1^4}{4} + \frac{1^6}{6} + \dots$$

کو بالترتیب ا، ب، ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$ا + ب + ج = ۲ - ۱ = ۱$$

اگر ایک کا خیالی جذر الکعب سمہ ہو تو

$$ا + ب + ج = ۲ - ۱ = ۱ \text{ (ج + ب + ا) (۱ + سمہ + سمہ ج)}$$

$$(۱ + سمہ + سمہ ج)$$

$$اب ا + ب + ج = ۱ + ۱ + ۱ + \frac{1^2}{2} + \frac{1^4}{4} + \frac{1^6}{6} + \dots$$

$$\text{اور } ۱ + سمہ + سمہ ج = ۱ + سمہ + ۱ + \frac{سمہ^2}{2} + \frac{سمہ^4}{4}$$

$$+ \frac{سمہ^6}{6} + \dots =$$

سہ لا

اسی طرح سے ۱ + سہ ب + سہ ج = نو

$$: ۱ + ۲ + ۳ + \dots + (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱) = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱$$

کیونکہ ۱ + ۲ + ۳ + ... = ۱ + ۲ + ۳ + ...
۲۰۵ - پہلے ن طبعی اعداد کی ۱ ویں قوتوں کا حاصل

جمع معلوم کرو۔
فرض کرو کہ حاصل جمع مطلوبہ جی ہے تب

$$جی = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن$$

یہ تسلیم کرو کہ

$$جی = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ن + (ن + ۱) + (ن + ۲) + \dots + (ن + ن)$$

(۱).....

جہاں ۱، ۲، ۳، ... ایسی مقداریں ہیں جن کی قیمتیں ابھی
معلوم کرنا باقی ہے۔
ن کی بجائے (ن + ۱) لکھنے اور تفریق کرنے سے

$$(ن + ۱) = ۱ + \{ (ن + ۱) - ۱ \} + ۲ + \{ (ن + ۱) - ۲ \} + \dots + ن + \{ (ن + ۱) - ن \}$$

$$+ ۱ + \{ (ن + ۱) - ۱ \} + ۲ + \{ (ن + ۱) - ۲ \} + \dots + ن + \{ (ن + ۱) - ن \}$$

(۲).....

(ن + ۱)، (ن + ۱)، (ن + ۱) ... کو پھیلاؤ اور ن کی

یکساں قوتوں کے سروں کو باہم مساوی رکھو، ن کے سر

مساوی رکھنے سے

$$1 = 1 + r \text{ یعنی } \frac{1}{1+r}$$

ن^۱ کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$r = \frac{1}{1+r} + r \text{ بس سے } \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+r}$$

اسی طرح ن^۲ کے سروں کو مساوی رکھو، اور ل^۱ کی بجائے
ان کی قیمتیں مندرج کرو اور مساوات کے دونوں جانب

بقی

$$\frac{r}{(1+r)} - \frac{r}{(1+r)^2} + \dots - \frac{r}{(1+r)^n}$$

سے ضرب دو اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$1 = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^n} - \frac{r}{(1+r)^{n+1}}$$

(۱) میں ن کی بجائے (ن-۱) رکھنے اور تفریق کرنے سے

$$1 = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^n} - \frac{r}{(1+r)^{n+1}}$$

$$+ \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^n} - \frac{r}{(1+r)^{n+1}}$$

ن^۲ کے سروں کو مساوی کرنے سے اور ل^۱ کی بجائے
ان کی قیمتیں مندرج کرنے سے

$$1 = \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots + \frac{1}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^n} - \frac{r}{(1+r)^{n+1}}$$

(۳) اور (۴) کو بالترتیب جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

$$(5) \dots\dots\dots + \frac{(1-q)(1-q)q}{(1-q)(1-q)} + \frac{q}{1} = \frac{1}{1+q} - \frac{1}{1}$$

$$(2) \dots + \frac{(3-q)(2-q)(1-q)q}{(3-r)(2-r)(1-r)r} + \frac{(1-q)q}{(1-r)r} = - (3)$$

اگر ق کو بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳

سے ظاہر ہے کہ سروں، لہجوں، لہجوں، لہجوں میں سے ہر ایک

صفر کے مساوی ہے اور (۵) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{1}{4} = \frac{2}{10}$

$$\frac{(2-1)(1-1)(2-1)(1-1)}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{(2-1)(1-1)}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$$

(۲) میں رقوم مطلق مساوی رکھنے سے

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اور مساوات (۱) میں $n = 1$ رکھنے سے

$$1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

۶۰۴۔ وفدِ اہل کے نتیجہ کو ذیل کے آسان ضابطہ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{(r-1)(1-r)}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1+r}{1+r} = 0$$

$$+ \frac{1(1-1)(2-1)(3-1)(4-1)}{4!} + \dots$$

جہاں $\frac{1}{b} = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{b_2} = \frac{1}{b_3} = \frac{1}{b_4} = \frac{1}{b_5}$

ان متقاہیر ب' ب' ب' ب' وغیرہ کو برنولی کے عدد کہتے ہیں، طالب علم چاہے تو دوسرے سلسلوں کے جمع کرنے میں ان اعداد اپنے استعمال کے متعلق مزید مثالیں بول کی مصنفہ کتاب محدود فرق (فائی نائیٹ ڈفرنس) میں ملاحظہ کر سکتا ہے۔

مثال - $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کی قیمت معلوم کرو

$$\text{حسب قاعدہ مندرجہ بالا ج} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n^2 + n + 1}{2}$$

$$\text{ب' - } \frac{3 \times 2 \times 5}{2} + n$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n^2}{12} = \frac{5n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \text{ (مستقل صفر ہے)}$$

امثلہ نمبری ۲۹ (ج)

ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$(1) \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$(2) \dots + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots$$

$$(3) \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$(4) \dots + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{3} \times \frac{1-2}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1-3}{2} + \frac{1}{1} \times \frac{1-2}{2} + 1 + 2 + 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2-3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2-2}{2} + \frac{1}{1} \times \frac{1-2}{2} + \frac{1}{1} \quad (6)$$

..... + (1+n) رقموں تک

$$(7) \quad \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n+1}{2(n+1)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(2-n)}{3} \times \frac{n+1}{2(n+1)} \dots \dots \dots n \text{ رقموں تک}$$

$$(8) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{1+n^2}{1-n^2} + \dots \dots \dots n \text{ رقموں تک}$$

$$(9) \quad 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} - \frac{n(n-1)(2-n)}{2 \times 2 \times 1}$$

..... + (1+n) رقموں تک

$$(10) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \text{ (لوک ۲)}$$

$$(11) \quad \dots + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{6 \times 5 \times 4} \dots$$

$$(12) \quad \dots + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$$

$$(13) \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$$

(14) ضابطہ متعلقہ کو استعمال کئے بغیر سلاسل ذیل کا حاصل

جمع معلوم کرو۔

$$(۱) ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۷$$

$$(۲) ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۷$$

(۱۵) سلسلہ ذیل کا حاصل جمع معلوم کرو

$$۱ + ۲ + \frac{۳}{۲} + \frac{۴}{۳} + \frac{۵}{۴} + \dots$$

(۱۶) ثابت کرو کہ $\frac{۱}{(۱-۱)(۱-۲)} + \frac{۱}{(۲-۱)(۲-۳)} + \dots$ کی تفصیل میں لاگت کا سر یہ ہے

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{(۱-۱)(۱-۲)} + \frac{۱}{(۲-۱)(۲-۳)} + \dots$$

(۱۷) اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{(۱-۱)(۱-۲)} + \frac{۱}{(۲-۱)(۲-۳)} + \dots$$

کا حاصل جمع معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر n کا کوئی ضعیف ہو تو

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{(۱-۱)(۱-۲)} + \frac{۱}{(۲-۱)(۲-۳)} + \dots$$

(۱۸) اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{(۱-۱)(۱-۲)} + \frac{۱}{(۲-۱)(۲-۳)} + \dots$$

(۱۹) ذیل کے دو سلسلوں کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

$$(۱) \dots + \frac{۱}{۱+۱} + \frac{۲}{۲+۱} + \frac{۳}{۳+۱} + \dots$$

$$(۲) \quad \frac{11}{4 \times 6} - \frac{13}{6 \times 8} + \frac{4}{8 \times 10} - \frac{9}{10 \times 12} + \frac{3}{12 \times 14} - \frac{5}{14 \times 16} + \dots - \frac{14}{18 \times 20} +$$

(۲۰) ایک لانتناہی سلسلہ کی n ویں رقم $(-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)(2n+1)}$ ہے
سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(۲۱) اگر $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + 1$
جہاں n کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو

$$(n-1) \left(\frac{1}{n}\right)^n + (n-3) \left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} + (n-5) \left(\frac{1}{n}\right)^{n-4} + \dots$$

کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۲) ذیل کے سلسلوں کی n رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو

$$(۱) \quad \dots - \frac{32}{45 \times 31} + \frac{14}{31 \times 17} - \frac{8}{17 \times 13} + \frac{4}{13 \times 9} - \frac{2}{9 \times 5}$$

$$(۲) \quad \dots - \frac{41}{4 \times 4 \times 5} + \frac{29}{6 \times 5 \times 4} - \frac{31}{5 \times 4 \times 3} + \frac{14}{7 \times 3 \times 2} - \frac{6}{3 \times 2 \times 1}$$

(۲۳) ثابت کرو کہ $1 > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^{n-1}} + 1$

$$\dots + \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^{n-2}} + \frac{1}{n^{n-3}} + \dots + \frac{1}{n} + 1 =$$

(۲۴) اگر $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$

کی تفصیل میں $\frac{1}{n!}$ کا سر لڑ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1-42}{315} = \frac{2}{1-2} \left(\frac{1}{1-2} + \frac{1}{1-2} \right) \text{ اور } \frac{1}{1-2} = \frac{1}{1-2}$$

(۲۵) اگر n کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ ذیل کے دو سلاسل میں سے ہر ایک صفر کے مساوی ہے۔

$$n - \frac{n(1-n)(2-n)}{3} + \frac{n(1-n)(2-n)(3-n)}{5} + \dots$$

$$n - \frac{1}{3} \times \frac{n(1-n)(2-n)}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{n(1-n)(2-n)(3-n)}{5} + \dots$$

(۲۶) اگر n کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(f+q)^n - (1-n)f^2q + \frac{n(2-n)}{2} f^2q^2 + \dots = \frac{f^n + q^n}{f-q}$$

(۲۷) اگر $f = (1-n)(1-n+1)(1-n+2) \dots (1-n+r-1)$

$q = (1+1)(1+2) \dots (1+r-1)$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{f^n + q^n}{f-q} = \frac{f^n + q^n}{f-q} = \frac{f^n + q^n}{f-q}$$

(۲۸) اگر n کا کوئی ضعف ہو تو ثابت کرو کہ

$$1 - \frac{n-3}{2} + \frac{(n-5)(n-4)}{3} - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{4} + \dots + \frac{(1-n)(1-n-1)(1-n-2) \dots (1-n-r+1)}{r}$$

مساوی ہے $\frac{3}{n}$ کے اگر ن طاق ہو اور مساوی ہے $-\frac{1}{n}$ کے

اگر ن جفت ہو۔
(۲۹) اگر لا کوئی کسر واجب ہو تو ثنایت کرو کہ

$$\dots - \frac{1^0}{1^0 - 1} + \frac{1^2}{1^2 - 1} - \frac{1^4}{1^4 - 1}$$

$$\dots + \frac{1^0}{1^0 + 1} + \frac{1^2}{1^2 + 1} + \frac{1^4}{1^4 + 1} =$$



تیسواں باب

عددوں کا نظریہ

۴۰۷۔ اس باب میں ہم لفظ عدد کو مثبت صحیح عدد کے معنوں میں استعمال کریں گے۔
وہ عدد جو سوائے اپنے آپ کے اور ایک کے کسی دوسرے عدد پر پورا تقسیم نہ ہو سکے عدد مفرد یا محض مفرد کہلاتا ہے۔
برعکس اسکے جو عدد اپنے اور ایک کے سوائے کسی دوسرے عدد پر بھی پورا تقسیم ہو سکے مرکب عدد کہلاتا ہے مثلاً ۵۳ عدد مفرد ہے اور ۳۵ عدد مرکب۔ دو عدد جن میں سوائے ایک کے کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد عدد کہلاتے ہیں مثلاً ۲۴ اور ۷۔ بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں۔

۴۰۸۔ ہم ذیل کے چند ابتدائی مسائل کو کثرت سے استعمال میں لائیں گے ان میں سے بعض تو عدد مفرد کی تعریف ہی سے اس قدر واضح ہیں کہ ان کو علوم متعارف تصور کیا جاسکتا ہے۔
(۱) اگر عدد a ایک حاصل ضرب $b \times c$ کو پورا تقسیم کرے اور حاصل ضرب کے ایک جزو ضربی b سے لے لیا جائے تو یہ دوسرے جزو ضربی c کو پورا تقسیم کرے گا۔
چونکہ a ، $(b \times c)$ کو پورا تقسیم کرتا ہے اس لئے a کا ہر جزو ضربی b c میں شامل ہے نیز چونکہ a بلحاظ b کے

مفرد ہے اس لئے $\frac{1}{2}$ کا کوئی جزو ضربی ب میں شامل نہیں ہے
پس $\frac{1}{2}$ کے تمام اجزائے ضربی ج میں موجود ہیں یعنی $\frac{1}{2}$ ج کو
پورا تقسیم کرتا ہے۔

(۲) اگر ایک عدد مفرد $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ب ج د کو پورا
تقسیم کرے تو یہ حاصل ضرب مذکور کے ایک جزو ضربی کو پورا تقسیم
کرے گا، بنا بریں اگر ایک عدد مفرد $\frac{1}{2}$ ب کو پورا تقسیم کرے
جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے تو یہ ب کو پورا تقسیم کرے گا۔

(۳) اگر $\frac{1}{2}$ بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہو تو یہ حاصل ضرب
ب ج کے لحاظ سے بھی مفرد ہوگا، ظاہر ہے کہ $\frac{1}{2}$ کا کوئی جزو
ضربی ب کو یا ج کو پورا تقسیم نہیں کر سکتا اس لئے حاصل ضرب
ب ج، اس کے کسی جزو ضربی پر تقسیم نہیں ہو سکتا یعنی $\frac{1}{2}$ بلحاظ
ب ج کے مفرد ہے، برعکس اس کے اگر $\frac{1}{2}$ بلحاظ ب ج کے
مفرد ہو تو یہ بلحاظ ب اور ج دونوں کے مفرد ہوگا۔

نیز اگر $\frac{1}{2}$ بلحاظ ب ج د میں سے ہر ایک کے مفرد
ہوں تو یہ بلحاظ حاصل ضرب ب ج د کے مفرد ہوگا اور
برعکس اس کے اگر اس کے کسی عدد کے لحاظ سے مفرد ہو تو یہ
اس عدد کے ہر جزو ضربی کے لحاظ سے مفرد ہوگا۔

(۴) اگر $\frac{1}{2}$ اور ب بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو
وکی ہر مثبت صحیح قوت اور ب کی ہر مثبت صحیح قوت
بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں گی، یہ امر از روئے (۳) فوراً
واضح ہو جاتا ہے۔

(۵) اگر $\frac{1}{2}$ بلحاظ ب کے مفرد ہو تو کسور $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ب

دونوں ترین رقوم میں ہوں گی یعنی ان کا مزید اختصار نہیں ہو سکتا
نیز اگر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کوئی دو مساوی کسریں ہوں اور

ب^۱۔ ادنیٰ ترین رقوم میں ہو تو ج اور د بالترتیب ۱ اور ۲ کے مساوی الضعیف ہونگے۔

۴.۹۔ مفرد عددوں کی تعداد لامتناہی ہے۔
اگر ایسا نہیں ہے تو فرض کرو کہ سب سے بڑا مفرد عدد ف ہے، تب حاصل ضرب $۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times \dots \times ف$ جسکا ہر جزو ضربی عدد مفرد ہے، اجزائے ضربی ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ...، ف میں سے ہر ایک پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اس لئے حاصل ضرب مذکور میں ایک جمع کر دینے سے جو عدد حاصل ہوگا وہ اجزائے ضربی ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ...، ف میں سے کسی پر بھی پورا تقسیم نہیں ہو سکیگا لہذا یا تو یہ حاصل ضرب خود مفرد ہے یا ف سے کسی بڑے عدد مفرد پر تقسیم ہوتا ہے ظاہر ہے کہ دونوں صورتوں میں ف سب سے بڑا مفرد عدد نہیں ہو سکتا، پس اعداد مفرد کی تعداد غیر محدود ہے۔
۴.۱۰۔ کوئی ناطق جبریت ضابطہ ایسا نہیں ہے جو محض مفرد عددوں کو تعبیر کرے۔
اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ضابطہ

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + \dots$$

محض مفرد اعداد کو تعبیر کرتا ہے۔
اگر لا = م تو فرض کرو کہ اس جملہ کی قیمت ف کے مساوی ہے، یعنی

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + \dots = ف$$

جب لا = م + ف، تو جملہ مذکور ہو جاتا ہے

۱+ب (م+ن+ف) + ج (م+ن+ف) + د (م+ن+ف) + =

یعنی = ۱+ب م + ج م + د م + + ن کا کوئی ضعف

یعنی = ن + ف کا کوئی ضعف

پس جملہ مذکورہ ن پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور اسلئے عدد مفرد نہیں ہے۔

۴۱۱۔ کوئی عدد اپنے مفرد اجزائے ضربی میں صرف ایک طریقہ سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

عدد مذکور کو ع سے تقسیم کرو اور فرض کرو کہ ع = ۱+ب م + ج م + د م + جہاں ۱+ب م + ج م + د م + اعداد مفرد ہیں،

نیز فرض کرو کہ ع = ع م + ب م + ج م + د م + جہاں ع م + ب م + ج م + د م + اعداد مفرد ہیں۔

تب ۱+ب م + ج م + د م + = ع م + ب م + ج م + د م + کو پورا تقسیم

کرتا ہے لیکن چونکہ اس حاصل ضرب کا ہر جزو ضربی مفرد ہے، اس لئے ع م + ب م + ج م + د م + کے اجزائے ضربی میں سے صرف ایک کو

(فرض کرو کہ ۱+ب م + ج م + د م + کو پورا تقسیم کرتا ہے لیکن ع م + ب م + ج م + د م + کے مساوی ہو گا۔

پس ۱+ب م + ج م + د م + = ع م + ب م + ج م + د م + اور حسب سابق ب م + ج م + د م + کا حاصل ضرب

۱+ب م + ج م + د م + کے اجزائے ضربی میں سے ایک جزو ضربی (فرض کرو کہ ب م + ج م + د م + کے مساوی ہو گا اور علیٰ ہذا القیاس، لہذا ع م + ب م + ج م + د م + کے اجزائے ضربی میں سے ایک جزو ضربی کا حاصل

۴۱۲۔ کسی عدد مرکب کے جو مختلف مقسوم علیہ ہو سکتے

کی ہر ایک رقم E کا ایک مقسوم علیہ ہے، لیکن E کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے ہر ایک طریقہ کے جواب میں دو مقسوم علیہ ہیں۔ لہذا

$$\frac{1}{P} (F+1)(Q+1)(L+1) \dots - \text{ہے۔}$$

اس میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ E پورا مربع نہیں ہے گویا اعداد F ، Q ، L ، میں سے کم از کم ایک عدد طاق ہے اگر E پورا مربع ہو تو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کا ایک

طریقہ $\sqrt{E} \times \sqrt{E}$ ہے اور اس طریقہ کے جواب میں صرف

ایک مقسوم علیہ \sqrt{E} ہے اگر ہم اس کو نکال دیں تو تحلیل کے طریقوں کی تعداد

$$\frac{1}{P} \{ (F+1)(Q+1)(L+1) \dots - 1 \}$$

رہ جاتی ہے، اس میں ہمیں $\sqrt{E} \times \sqrt{E}$ کا ایک طریقہ جمع کرنا چاہئے اسی طرح سے ہمیں مطلوبہ تعداد

$$\frac{1}{P} \{ (F+1)(Q+1)(L+1) \dots + 1 \}$$

حاصل ہوتی ہے۔

۴۱۴۔ ایک عدد مرکب کتنے طریقوں سے دو ایسے اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے جو بلحاظ ایک دوسرے کے معکوس ہوں۔

حسب سابق فرض کرو کہ عدد $E = P \times Q \times R \dots$

منکوحہ دو اجزائے ضربی میں سے ایک میں لازماً 1 واقع ہوگا کیونکہ اگر ایسا نہ ہوتا تو کی کوئی قوت ایک جزو ضربی میں شامل ہوتی اور کوئی اور قوت دوسرے میں اور اس طرح سے یہ دو اجزائے ضربی بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد نہیں ہوتے۔

یہی طریقہ 1 بھی صرف ایک جزو ضربی میں شامل ہوتا اور علیٰ ہذا قیاس

پس مطلوبہ تعداد اُن طریقوں کی تعداد کے مساوی ہے جنہیں حاصل ضرب $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots$ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، یعنی طریقوں کی تعداد

$$\frac{1}{1} (1+1) (1+1) (1+1) \dots \text{یعنی } 2^{1-1} \text{ کے مساوی ہے}$$

جہاں n ، e کے مختلف مفرد اجزائے ضربی کی تعداد کے مساوی ہے۔

۴۱۵۔ ایک عدد کے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ عدد مذکور حسب سابق $1 \times 2 \times 3 \dots$ ہے

تب حاصل ضرب

$$(1+1+1+\dots+1) (1+2+\dots+2) (1+3+\dots+3) \dots (1+n+\dots+n)$$

کی ہر ایک رقم ایک مقسوم علیہ ہے، اس لئے مقسوم علیہوں کا حاصل جمع اِس حاصل ضرب کے مساوی ہے، یعنی حاصل جمع مطلوبہ

$$\frac{1^{1+1}-1}{1-1} \times \frac{2^{2+1}-1}{2-1} \times \frac{3^{3+1}-1}{3-1} =$$

مثال ۱۔ عدد ۲۱۶۰۰ پر غور کرو۔

چونکہ $2 \times 3 \times 2 = 5 \times 2 \times 3 \times 2 = 10 \times 6 = 21600$

مقسوم علیہوں کی تعداد $= (1+2)(1+3)(1+5) = 6$

مقسوم علیہوں کا حاصل جمع $= \frac{1-5}{1-2} \times \frac{1-3}{1-3} \times \frac{1-2}{1-2}$

$$= 4 \times 120 = 3120 = 3120 \times 4 \times 3 =$$

نیز ۲۱۶۰۰ دو ایسے اجزائے ضربی میں جو بلحاظ ایک دوسرے کے منفرد ہوں $3-1$ یعنی ۳ طریقوں سے تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ن طاق ہو تو ثابت کرو کہ $n(1-n)$ پر تقسیم ہو سکتا ہے ظاہر ہے کہ $n(1-n) = n(1-n)(1+n)$ چونکہ n طاق ہے اس لئے $(1-n)$ اور $(1+n)$ دو متصل جفت عدد ہیں، اس لئے ان میں سے ایک عدد ۲ پر اور دوسرا ۴ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔

نیز $n(1-n)$ میں $(1+n)$ تین متصل عدد ہیں، اس لئے ان میں سے ایک ۳ پر تقسیم ہو سکتا ہے، لہذا جملہ بالا ۲، ۳ اور ۴ کے حاصل ضرب یعنی ۲۴ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ ۳ کی بڑی سے بڑی قوت معلوم کرو جو ۱۰۰ میں شامل ہے۔

پہلے ۱۰۰ عددوں میں سے اتنے عدد ۳ پر تقسیم ہو سکتے ہیں جتنی بار کہ ۳۰۰ میں آسکتا ہے، یعنی ۳۳ عدد ۳ پر تقسیم ہو سکتے ہیں۔ یہ اعداد ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۴، ۲۷، ۳۰، ۳۳، ۳۶، ۳۹، ۴۲، ۴۵، ۴۸، ۵۱، ۵۴، ۵۷، ۶۰، ۶۳، ۶۶، ۶۹، ۷۲، ۷۵، ۷۸، ۸۱، ۸۴، ۸۷، ۹۰، ۹۳، ۹۶، ۹۹ ہیں، ان عددوں میں سے بعض میں جزو ضربی ۳ دو دفعہ آتا ہے مثلاً ۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲، ۸۱، ۹۰، ۹۹ میں ایسے عددوں کی تعداد اس خارج قسمت کے مساوی ہے جو ۱۰۰ کو ۹ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے، بعض ایسے ہیں جن میں جزو ضربی ۳ تین بار شامل ہے مثلاً ۲۷، ۵۴، ۸۱،

ان کی تعداد ۱۰۰ - ۲۷ کے خارج قسمت کے برابر ہے وہ عدد جس میں جزو ضربی ۳ چار بار آتا ہے وہ صرف ایک عدد ہے پس مطلوبہ بڑی سے بڑی قوت = $۳۳ + ۱۱ + ۳ + ۱ = ۴۸$ یہ مشق دفعہ مابعد کے مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔
۴۱۶۔ مفرد عدد ۱ کی بڑی سے بڑی قوت جو ۱۱ میں شامل ہے اسے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ بڑے سے بڑے صحیح عدد جو $\frac{۱}{۱}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ، میں شامل ہیں بالترتیب $\left(\frac{۱}{۱}\right)$ ، $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ ، $\left(\frac{۱}{۳}\right)$ ، سے تعبیر ہوتے ہیں، تب اعداد ۱، ۲، ۳، - ن میں $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ سے زیادہ ہیں جن میں ۱ کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، یہ اعداد ۱، ۲، ۳، ہیں، اسی طرح $\left(\frac{۱}{۳}\right)$ سے $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ سے زیادہ ایسے ہیں جن میں ۱ کم از کم ایک بار شامل ہوتا ہے، اور $\left(\frac{۱}{۳}\right)$ سے زیادہ ایسے ہیں جن میں ۱ کم از کم ایک بار آتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس، پس ۱ کی بڑی سے بڑی قوت جو ۱۱ میں شامل ہے یہ ہے

$$\left(\frac{۱}{۱}\right) + \left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\right) + \dots$$

۴۱۷۔ اس باب کے باقی حصہ میں سہولت کی خاطر ن کے کسی ضعف کو ضعف (ن) سے تعبیر کیا جائے گا۔
۴۱۸۔ ثابت کرو کہ متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب ۱ پر

پورا تقسیم ہوتا ہے متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب ض_۱ ہے
 جہاں ن ان اعداد میں سب سے چھوٹا ہے
 تب ض_۱ = ن (۱+ن) (۲+ن) (ن-۱+ن)

اور ض_۱ = (۱+ن) (۲+ن) (۳+ن) (ن+ن)

$$\therefore \text{ن ض}_1 = (1+n) \text{ض}_1 = \text{ن ض}_1 + \text{ر ض}_1$$

$$\therefore \text{ض}_1 = \text{ض}_1 - \frac{\text{ض}_1}{\text{ن}} \times \text{ر}$$

= (۱-۱/ن) متصل صحیح اعداد کے حاصل ضرب کا رہ گیا۔
 پس اگر (۱-۱/ن) متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب ل-۱ پر تقسیم ہو جائے تو

$$\text{ض}_1 = \text{ض}_1 - \text{ر ضعف (ل-۱)}$$

$$= \text{ضعف (ل)}$$

اب ض = ل، اس لئے ض، لے کا ضعف ہے، بنائیں
 ض، ض، بھی لے کے ضعف ہیں۔ اس طرح ہم نے یہ
 ثابت کر دیا ہے کہ اگر ل-۱ متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب
 ل-۱ پر پورا تقسیم ہو جائے تو متصل ل-۱ صحیح اعداد کا حاصل
 ضرب لے پر پورا تقسیم ہو جائیگا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ
 ہر دو متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب ل-۱ پر تقسیم ہو جاتا
 ہے، اس لئے ہر تین متصل صحیح اعداد کا حاصل ضرب ل-۱
 پر تقسیم ہو سکتا ہے، اور علیٰ ہذا القیاس کہہ سکتے ہیں۔
 اس مسئلہ کو اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔
 دفعہ ۲۱۶ کے مطابق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ہر ایک مفرد

جزو ضربی (ن+ل) میں کم از کم اتنی بار شامل ہوتا ہے جتنی بار کہ یہ (ن+ل) میں شامل ہوتا ہے اسے ہم طالب علم کے لئے بطور مشق کے چھوڑتے ہیں۔

۹۴- اگر ف کوئی مفرد صحیح عدد ہو تو (ل+ب) کی تفصیل میں پہلی اور آخری رقم کے سوائے باقی سب رقوم کے سر ف پر تقسیم ہو سکتے ہیں۔

پہلی اور آخری رقم کے سوائے ہر ایک رقم کا سر
ف (ف-۱) (ف-۲) (ف-ل+۱)

کی شکل کا ہے جہاں ل کوئی ایسا صحیح عدد ہو سکتا ہے جو ف-۱ سے بڑا نہ ہو۔ اب یہ جملہ ایک صحیح عدد ہے نیز چونکہ ف عدد مفرد ہے اس لئے ل کا کوئی جزو ضربی اسکا مقسوم علیہ نہیں ہو سکتا۔ اور چونکہ ف بڑا ہے ل سے اسلئے ل کے کسی جزو ضربی کو تقسیم نہیں کر سکتا یعنی
ف (ف-۱) (ف-۲) (ف-۳) (ف-ل+۱) لازماً ل پر تقسیم ہو سکتا ہے، لہذا ابتدائی اور آخری رقم کے سوائے ہر رقم کا سر ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
۹۵- اگر ف کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ

$$(ل+ب+ج+د+....) = ل + ب + ج + د + ... + ضیف (ف)$$

ب + ج + د + کی بجائے بہ رکھو

تب حسب وضع ماقبل (ل+بہ) = ل + بہ + ضیف (ف)

نیز پتہ = (ب+ج+د+....) = فرض کرو (ب+جہ)

$$= ب + جہ + ضیف (ف)$$

اسی طرح مسلسل عمل کرنے سے ہم مطلوبہ نتیجہ پہنچ جاتے ہیں
۴۲۱۔ (فرما کا مسئلہ)۔ اگر ف کوئی عدد مفرد ہو اور عدد
ع مفرد ہو بلحاظ ف کے تو $\frac{ع}{ف} = ۱$ ۔ ف کا کوئی

ضعیف ہوگا
ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$(۱ + ب + ج + د + ... + ف + ب + ج + د + ... + ضعیف ف)$$

فرض کرو کہ مقادیر ۱، ب، ج، د، ... وغیرہ میں سے ہر ایک
مقداراً کے مساوی ہے اور ان کی تعداد ع ہے، تب

$$ع = ع + ضعیف (ف)$$

$$\text{یعنی } ع (ع - ۱) = ضعیف (ف)$$

لیکن ع بلحاظ ف کے مفرد ہے اسلئے $\frac{ع}{ف} = ۱$ ۔ ف کا
ضعیف ہے۔
نتیجہ صریح۔ چونکہ ف مفرد ہے اسلئے ف۔ ۱ کوئی جفت
عدد ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ ف = ۲

$$\text{اس لئے } (ع - ۱) + ۱ = (ع - ۱) = ضعیف (ف)$$

$$\text{لہذا } ع - ۱ + ۱ = ع - ۱ = ضعیف ہے ف کا$$

$$\text{یعنی } ع - ۱ = ک ف \pm ۱ \text{ جہاں ک کوئی مثبت صحیح}$$

عدد ہے۔

۴۲۲۔ یاد رہے کہ دفعہ ۴۲۱ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ
 $\text{ع} = \text{ع} = \text{ضعف (ف)}$ خواہ ع بمجاظ ف کے مفرد ہو
 یا نہ ہو، یہ نتیجہ اکثر اوقات شرما کے مسئلہ کی نسبت زیادہ
 مفید ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $\text{ن} - \text{ن}$ ، ن پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
 چونکہ ع عدد مفرد ہے اس لئے $\text{ن} - \text{ن} = \text{ضعف (د)}$

نیز $\text{ن} - \text{ن} = \text{ن} (\text{ن} - ۱) = \text{ن} (\text{ن} + ۱) (\text{ن} - ۱) (\text{ن} + ۱)$
 اب $(\text{ن} - ۱) (\text{ن} + ۱)$ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے، اسلئے
 $\text{ن} - \text{ن}$ ، پورا تقسیم ہو سکتا ہے $\times ۶$ ، یعنی ۴۲۲۔

مثال ۲۔ اگر ف عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ کسی دو اعداد
 کی ف میں قوتوں کا فرق ان اعداد کے فرق سے بقدر ف
 کے کسی ضعف کے زیادہ ہوگا۔
 فرض کرو کہ لا اور ما دو عدد ہیں، تب

لا - لا = ضعف (ف) اور ما - ما = ضعف (ف)

یعنی لا - ما - (لا - ما) = ضعف (ف) اور یہی ثابت کرنا تھا
 مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ہر مربع عدد ۵ ن یا ۵ ن ± ۱ کی
 شکل کا ہوتا ہے۔

اگر ع بمجاظ ۵ کے مفرد نہ ہو تو $\text{ع} = ۵$ ن جہاں ن کوئی مثبت
 صحیح عدد ہے اگر ع بمجاظ ۵ کے مفرد ہو تو
 $\text{ع} = ۵$ ن ± ۱ فرما کے مسئلہ کی رو سے ۵ کا ضعف ہے،
 پس یا $\text{ع} = ۱$ یا $\text{ع} = ۱ + ۵$ ، ۵ کا ضعف ہوگا یعنی $\text{ع} = ۵$ ن ± ۱

امثلہ نمبری ۳۔ (۱)

۱۔ بتاؤ کہ ان اعداد

۷۴۰۸۸، ۱۸۳۷۵، ۴۳۷۴، ۳۶۷۵
کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے
کہ حاصل ضرب پورے مربع بن جائیں۔
۲۔ بتاؤ کہ ان اعداد

۷۴۲۳، ۱۰۹۳۵۰، ۵۳۹۵۳۹
کو جداگانہ کن چھوٹے سے چھوٹے اعداد کے ساتھ ضرب دیا جائے
کہ حاصل ضرب پورے مربع بن جائیں۔
۳۔ اگر ۹ اور ۱۱ ما مشیت صحیح عدد ہوں اور ۹۹۔ ما جفت
ہو تو ثابت کرو کہ ۹۹۔ ما، ۱۱۔ ما پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
۴۔ ثابت کرو کہ کسی عدد اور اس کے مربع کا فرق جفت
ہوتا ہے۔

۵۔ اگر ۴۔ ما، ۳ کا ضعف ہو تو ثابت کرو کہ
۴۔ ما، ۲۔ ما، ۱۔ ما پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
۶۔ ۸۰۶۴ کے مقسوم علیہوں کی تعداد معلوم کرو۔
۷۔ عدد ۷۰۵۶ کتنے مختلف طریقوں سے دو اجزائے ضربی
میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔
۸۔ ثابت کرو کہ ۲۔ ما، ۱۵ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
۹۔ ثابت کرو کہ $n(n+1)$ کا ضعف ہے
۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر کسی عدد اور اس عدد کے مربع دونوں
کو ۶ پر تقسیم کیا جائے تو دونوں صورتوں میں وہی باقی حاصل
ہوتی ہے۔

۱۱۔ اگر n جفت ہو تو ثابت کرو کہ $n(n+20)$ ۴۸
پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
۱۲۔ ثابت کرو کہ $n(n-1)(n+3)$ ۲۴ پر پورا تقسیم
ہو جاتا ہے۔

- ۱۳۔ اگر n سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $n - 5$ ، $n + 2$ ، n پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۱۴۔ ثابت کرو کہ $n + 2$ ، $n + 4$ ، $n + 8$ کا ضعف ہے۔
- ۱۵۔ اگر n کوئی عدد مفرد ہو جو 3 سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $n - 1$ ، $2n$ کا کوئی ضعف ہے۔
- ۱۶۔ ثابت کرو کہ n کی تمام قیمتوں کے لئے $n - 1$ ، 3 پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اگر n طاق ہو تو $2n$ پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۱۷۔ ثابت کرو کہ اگر دو عدد مفرد 6 سے بڑے ہوں تو ان کے مربعوں کا فرق 24 پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۱۸۔ ثابت کرو کہ کوئی مربع عدد $3n - 1$ کی شکل کا نہیں ہو سکتا۔
- ۱۹۔ ثابت کرو کہ ہر کعب عدد $9n$ یا $9n \pm 1$ کی شکل کا ہوتا ہے۔
- ۲۰۔ ثابت کرو کہ اگر کسی کعب عدد کو 7 پر تقسیم کیا جائے تو باقی 1 یا 6 چھگی۔
- ۲۱۔ اگر ایک عدد مربع بھی ہو اور کعب بھی تو ثابت کرو کہ یہ $9n$ یا $n + 1$ کی شکل کا ہو گا۔
- ۲۲۔ ثابت کرو کہ کوئی مثلث عدد $3n - 1$ کی شکل کا نہیں ہو سکتا۔
- ۲۳۔ اگر $2n + 1$ کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ کو $2n + 1$ پر تقسیم کرنے سے مختلف باقیات بچتی ہیں۔
- ۲۴۔ ثابت کرو کہ $1 + 1 + 1$ اور $1 - 1$ ہمیشہ جفت ہوتے ہیں خواہ 1 اور -1 کی کچھ ہی قیمتیں ہوں۔

- ۲۵۔ ثابت کرو کہ ہر طاق عدد کی جفت قوت n اور $n+1$ کی شکل کی ہوتی ہے۔
- ۲۶۔ ثابت کرو کہ کسی عدد کی 12 ویں قوت $13n$ اور $14n+1$ کی شکل کی ہوتی ہے۔
- ۲۷۔ ثابت کرو کہ کسی عدد کی 8 ویں قوت $9n$ یا $10n \pm 1$ کی شکل کی ہوتی ہے۔
- ۲۸۔ اگر n کوئی عدد مفرد ہو جو 5 سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۲۹۔ اگر n کوئی مفرد عدد ہو جو 2 سے بڑا ہو بشرطیکہ n نہ ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر $16n+1$ تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۳۰۔ اگر n بلحاظ 2^m اور 3^m کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر $2^{2m} 3^{2m} 5^{2m}$ پورا تقسیم ہو سکتا ہے۔
- ۳۱۔ اگر $(n+1)$ اور $2n+1$ دونوں مفرد عدد ہوں تو ثابت کرو کہ n^2 پر پورا تقسیم ہو سکتا ہے $n(n+1)(2n+1)$ پر بشرطیکہ n بلحاظ 2^m اور 3^m کے مفرد ہو۔
- ۳۲۔ اگر n عدد مفرد ہو اور n بلحاظ n کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ n^2 پر n^2 پورا تقسیم ہو جاتا ہے n^2 پر
- ۳۳۔ اگر m ایک عدد مفرد ہو اور n اور b دو اور عدد ہوں جو m سے کم ہوں تو ثابت کرو کہ
- $$n^m + n^{m-1}b + n^{m-2}b^2 + \dots + n^2b^{m-2} + nb^{m-1} + b^m$$

m کا ضعف ہو گا۔

۳۴۔ اگر n کوئی عدد ہو تو کوئی اور عدد n اس شکل $n = 2^a + 3^b + 5^c$ میں لکھا جاسکتا ہے جہاں a, b, c اور b

بالترتیب خارج قسمت اور باقی ہیں جو α کو α پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ عدد α کو جس کے ساتھ کوئی اور عدد اس طرح منسوب کیا جاتا ہے۔ مقیاس کہتے ہیں۔ بلحاظ کسی خاص مقیاس کے عدد α کی مختلف شکلیں ہیں جن میں سے ہر ایک شکل باقی β کی مختلف قیمتوں کے جواب میں پیدا ہوتی ہے مثلاً مقیاس ۳ کے جواب میں β ق، β ق + ۱، β ق + ۲ کی شکل کے عدد ہیں۔ ان کو اختصاراً β ق، β ق + ۱، β ق + ۲ لکھ سکتے ہیں کیونکہ

β ق + ۲ = β ق + ۱ + ۱ = β ق + ۱ + ۱ اسی طرح سے مقیاس ۵ کے جواب میں عدد α کی پانچ شکلوں β ق، β ق + ۱، β ق + ۲، β ق + ۳، β ق + ۴ میں سے کسی ایک شکل کا ہوگا۔

۲۲۴۔ اگر β اور γ دو ایسے صحیح عدد ہوں کہ اگر α کو α پر تقسیم کیا جائے تو وہی باقی بچے تو ان عددوں کو بلحاظ مقیاس α کے مستطابق کہتے ہیں۔ اس صورت میں β - γ کا ضعف ہوگا۔ گلاس کی ترقیم کے موافق ہم اس کو بعض اوقات یوں تحریر کریں گے۔

$\beta \equiv \gamma \pmod{\alpha}$ یا $\beta - \gamma \equiv 0 \pmod{\alpha}$

ان ضابطوں میں سے ہر ایک ضابطہ استطابق کہلاتا ہے۔ ۲۲۵۔ اگر بلحاظ مقیاس α کے β اور γ مستطابق ہوں تو β اور γ مستطابق ہونگے جہاں α کوئی صحیح عدد ہے۔

حسب مفروض $\beta - \gamma \equiv 0 \pmod{\alpha}$ جہاں α کوئی صحیح عدد ہے اسلئے $\beta - \gamma = \alpha$ یا $\beta = \gamma + \alpha$ پس مسئلہ ثابت ہوا ۲۲۶۔ اگر α بلحاظ β کے مفرد ہو تو مقادیر α ، $\alpha + \beta$ ، $\alpha + 2\beta$ ، (ب - ۱) α

کو ب پر تقسیم کرنے سے جو باقیات حاصل ہوں گی وہ سب مختلف ہوں گی۔
 اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ جب دو مقادیر m اور n کو ب پر تقسیم کیا جائے تو ایک ہی باقی r حاصل ہوتی ہے
 $m = a \times b + r$ اور $n = c \times b + r$
 یعنی $(m - r) = (n - r)$ اور چونکہ اس لئے ب (م - م) کو تقسیم کرتا ہے اس لئے ب (م - م) کو تقسیم کرتا ہے، لیکن یہ ناممکن ہے کیونکہ m اور n دونوں ب سے کم ہیں۔

پس باقیات سب مختلف ہیں اور چونکہ ان مقداروں میں سے کوئی مقدار ب پر تقسیم نہیں ہو سکتی اس لئے باقیات سلسلہ ۱، ۲، ۳،، $b-1$ کی رتیب ہونگی لیکن ضروری نہیں کہ باقیات اسی ترتیب میں ہوں۔

نتیجہ صریح۔ اگر a بلحاظ ب کے مفرد ہو اور ج کوئی عدد ہو تو ذیل کے سلسلہ حسابہ

J (ج + ۱) (ج + ۲) (ج + ۳) ج + (ب - ۱) ۱
 کی ب رتیبوں کو ب پر تقسیم کرنے سے وہی باقیات نکلتی ہیں جو سلسلہ

ج + ۱، ج + ۲، ج + (ب - ۱) ۱

سے نکلتی ہیں اگرچہ ضروری نہیں کہ اسی ترتیب میں ہوں۔
 پس باقیات ۱، ۲،، ب - ۱ ہوں گی۔

۴۲۷۔ اگر ب، ب، ب، بلحاظ مقیاس ۱ کے مقادیر

ایک ہی باقی نکلتی ہے، 'ہذا

الف-ا (ع^ق-ا) = ضِعْف (ف)

لیکن (ف-۱) بلحاظ ف کے مفرد ہے، اس لئے

ع ۱۰۱ = ضف (ف)

۴۲۹۔ ہم اُن صحیح اعداد کی تعداد کو جو کسی عدد (۱) سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں فہ (۱) سے تعبیر کر لیتے، مثلاً فہ (۲) = ۱ فہ (۱۳) = ۱۲، فہ (۱۸) = ۶ کیونکہ وہ اعداد جو ۱۸ سے کم ہیں اور بلحاظ ۱۸ کے مفرد ہیں ذیل کے چہ اعداد ۱، ۵، ۷، ۱۱، ۱۷، ہیں، یہ امر قابل غور ہے کہ ہم یہاں ا کو سب اعداد کے لحاظ سے مفرد خیال کرتے ہیں۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ اگر اعداد (ج، د)..... بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو فہ (ج، د).....

$$= \text{فہ (ا)} \times \text{فہ (ب)} \times \text{فہ (ج)} \times \text{فہ (د)} \dots\dots$$

حاصل ضرب 100 پر غور کرواتب پہلے 100 عدد اب سطروں میں اس طرح لکھے جاسکتے ہیں

۱، ۲، کی ۱

$$1+1, \dots, 'k+1, \dots, r+1, 1+1$$
$$1 + 12 \dots \dots 'k + 12 \dots \dots 'r + 12 '1 + 12$$
$$(b-1)+1, (b-1)+2, \dots, (b-1)+k, \dots, (b-1)+r+1, (b-1)+r+2, \dots, (b-1)+n$$

اس انتصابی ستون پر غور کرو جو کہ سے شروع ہوتا ہے
اگر کہ ملاحظہ کر کے مفرد ہو تو اس ستون کی سب زمیں

بلحاظ ۱ کے مفرد ہونگی، لیکن اگر ک اور ۱ میں کوئی مشترک جزو ضربی ہو تو اس ستون کا کوئی عدد بلحاظ ۱ کے مفرد نہیں ہوگا۔ اب پہلی قطار میں فہ (۱) عدد ہیں جو بلحاظ ۱ کے مفرد ہیں۔ پس فہ (۱) انتصابی ستون ایسے ہیں جن کی سب رقیں بلحاظ ۱ کے مفرد ہیں۔ فرض کرو کہ وہ ستون جو ک سے شروع ہوتا ہے اسی قسم کا ستون ہے۔ اس ستون کی رقیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور اگر اس کی رقیوں کو ب پر تقسیم کیا جائے تو بالترتیب باقیات ۱، ۲، ۳، (ب-۱) حاصل ہوتی ہیں (دیکھو نتیجہ صریح دفعہ ۴۲۶) پس اس ستون میں فہ (ب) عدد بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔

اب فہ (۱) ستون ایسے ہیں جنکی ہر رقم بلحاظ ۱ کے مفرد ہے۔ اور ایسے ہر ستون میں فہ (ب) عدد ہیں جو بلحاظ ب کے مفرد ہیں۔ پس جدول بالا میں ال فہ (۱) x فہ (ب) عدد ایسے ہیں جو بلحاظ ۱ اور ب دونوں کے مفرد ہیں۔ یعنی بلحاظ ۱ ب کے مفرد ہیں۔ لہذا

فہ (۱ ب) = فہ (۱) x فہ (ب)
 فہ (۱ ب ج د) = فہ (۱) x فہ (ب) x فہ (ج) x فہ (د)
 = فہ (۱) x فہ (ب) x فہ (ج) x فہ (د)
 = فہ (۱) x فہ (ب) x فہ (ج) x فہ (د)
 ۴۳۱۔ اُن مثبت صحیح اعداد کی تعداد معلوم کرو جو ایک معلوم عدد سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں
 فرض کرو کہ تعداد مذکور ع ہے اور ع = ۱ ب ج جہاں

ا' ب' ج' مختلف اعداد مفرد ہیں اور ف' ق' ر' مثبت صحیح عدد ہیں۔

جزو ضربی ر' پر غور کرو، طبعی اعداد ۱، ۲، ۳، ... ر'۔ ۱، ر' میں وہ اعداد جو بلحاظ ۱ کے مفرد نہیں ہیں یہ ہیں۔

۱، ۲، ۳، ۴، (ر' - ۱)، (ر' - ۲)، (ر' - ۳)، ۱

اور ان کی تعداد ر' - ۱ ہے، اس لئے

$$\text{فہ (ر')} = \text{ر'} - \text{ر' - ۱} = \text{ر'} - (۱ - \frac{1}{\text{ر'}})$$

اب سب اجزائے ضربی ر'، ب'، ق'، ج' بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہیں۔

$$\therefore \text{فہ (ر' ب' ج')} = \text{فہ (ر')} \times \text{فہ (ب')} \times \text{فہ (ج')} \dots$$

$$= \text{ر'} (۱ - \frac{1}{\text{ر'}}) \times \text{ب'} (۱ - \frac{1}{\text{ب'}}) \times \text{ج'} (۱ - \frac{1}{\text{ج'}}) \dots$$

$$= \text{ر' ب' ج'} (۱ - \frac{1}{\text{ر'}}) (۱ - \frac{1}{\text{ب'}}) (۱ - \frac{1}{\text{ج'}}) \dots$$

$$\text{یعنی فہ (ع)} = \text{ع} (۱ - \frac{1}{\text{ر'}}) (۱ - \frac{1}{\text{ب'}}) (۱ - \frac{1}{\text{ج'}}) \dots$$

مثال - ثابت کرو کہ ان سب صحیح اعداد کا حاصل جمع جو ع سے کم ہوں اور بلحاظ اسکے مفرد ہوں $\frac{1}{\text{ع}} \times \text{فہ (ع)}$ ہے اگر لا کوئی صحیح عدد ہو جو ع سے کم ہو اور بلحاظ اس کے مفرد ہو تو ع - ۱ بھی ایک صحیح عدد ہوگا جو ع سے کم اور بلحاظ اس کے مفرد ہوگا۔

صحیح عددوں کو 'ا'، 'ف'، 'ق'، 'ر'..... سے اور ان کے حاصل جمع کو ج سے تعبیر کرو۔ تب

$$ج = ا + ف + ق + ر + + (ع - ر) + (ع - ق) + (ع - ف) + (ع - ا)$$

اس سلسلہ میں فہ (ن) رقمیں ہیں۔

اس سلسلہ کو الٹا لکھنے سے

$$ج = (ع - ا) + (ع - ف) + (ع - ق) + (ع - ر) + + ر + ق + ف + ا$$

مجموع کرنے سے $ج = ج + ع + ع + ع + + ع$ فہ (ع) رقموں تک

$$ج = ع \times فہ (ع)$$

۳۳۳۔ دفعہ گذشتہ سے ظاہر ہے کہ جو عدد ع سے کم ہیں اور بلحاظ اس کے مفرد نہیں ہیں ان کی تعداد

$$= ع - ع (ا - \frac{1}{ا}) (ا - \frac{1}{ب}) (ا - \frac{1}{ج}) (ا - \frac{1}{د}) \dots$$

$$\text{یعنی} = \frac{ع}{ا} + \frac{ع}{ب} + \frac{ع}{ج} + \dots - \frac{ع}{ا ب} - \frac{ع}{ا ج} - \frac{ع}{ب ج} - \dots$$

$$+ \frac{ع}{ا ب ج} + \dots$$

یہاں $\frac{ع}{ا}$ ذیل کے عددوں

$$ا، ۲، ۳، ۴،، ع \times ا$$

کی اس تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں جزو ضربی ۱ شامل ہے۔

اور رقم $\frac{ع}{ا ب}$ عددوں $ا ب، ۲ ا ب، ۳ ا ب،، ع$

$\frac{ع}{ا ب} \times ا ب$ کی اس تعداد کو تعبیر کرتی ہے جنہیں جزو ضربی ۱ ب

شامل ہے اور علیٰ ہذا القیاس مزید براں ہر ایک عدد ایک اور

صرف ایک بار شمار میں آتا ہے۔ مثلاً ارب کا ہر ایک ضعف ایک مرتبہ ا کے اضعاف میں، ایک مرتبہ ب کے اضعاف میں اور منحنی طور پر ایک مرتبہ ارب کے اضعاف میں شامل ہوگا۔ پس کل ایک مرتبہ شمار میں آئے گا اسی طرح ارب ج کا ہر ضعف (ا، ب، ج) اضعاف میں جن میں بالترتیب

$\frac{ع}{ا}$ ، $\frac{ع}{ب}$ ، $\frac{ع}{ج}$ رقمیں ہیں ایک ایک بار آئیگا
 اور ا ب، ز ج، ب ج کے اضعاف جن میں بالترتیب
 $\frac{ع}{ا}$ ، $\frac{ع}{ب}$ ، $\frac{ع}{ج}$ رقمیں ہیں ایک ایک بار آئیگا
 اور ا ب ج کے اضعاف میں ایک مرتبہ آئیگا۔

اس لئے اب ج کا ہر ایک ضعف ۳ - ۳ + ۱ یعنی کل
ایک اور صرف ایک وفد آئیگا۔ اسی طرح اور صورتوں پر بحث
کی جاسکتی ہے۔

۴۳۳۔ [وگن، کا مسئلہ]۔ اگر ف ایک عدد مفرد ہو تو

۱۔ الف۔ ا، ف پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

دفعہ ۳۱۲ مشق ۲ کی رو سے

$$\frac{1-f}{(1-f)(1-f)} - \frac{1-f}{(1-f)(1-f)} + \frac{1-f}{(1-f)(1-f)} = \frac{1-f}{(1-f)(1-f)}$$

$$\frac{(ف-۱)(ف-۲)(ف-۳)}{(ف-۳) + \dots + (ف-۱) + ف}$$

اور فرما کے مسئلہ کی رو سے جملوں (ف-۱)، (ف-۲)، (ف-۳)، (ف-۴)۔

جبکہ ۱ = ف - ا یا ا، کیونکہ اگر ا کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی ا بچے تو

$$۱ - ا = ۱ - ۱ = ۰ \text{ (مق ف)}$$

اور چونکہ ف مفرد ہے اس لئے یہ صرف اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ ۱ + ۱ = ف یا ۱ - ۱ = ف یعنی جبکہ ۱ = ف - ا یا ا لہذا حاصل ضربوں ۱، ۲، ۳، ۴، ... (ف - ۱) ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے صرف ایک حاصل ضرب ایسا ہے جس کو ف پر تقسیم کرنے سے باقی ۱ حاصل ہوتی ہے یعنی سلسلہ (۱) میں جو عدد ہیں ان میں سے ہر ایک کی صورت میں بالاستثنائے پہلے اور آخری عدد کے ہم ایک اور صرف ایک عدد ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ ان دونوں کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ۱ کی شکل کا ہو۔ اس لئے صحیح عددوں ۱، ۲، ۳، ۴، ... (ف - ۱) ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے جنکی تعداد جفت ہے دو دو عددوں کو لیکر ایسے زوج بنائے جاسکتے ہیں کہ ہر زوج کا حاصل ضرب ضعف (ف) + ۱ کی شکل کا ہو۔ اس لئے ان سب زوجوں کو باہم ضرب دینے سے

$$۱ + (ف - ۱) \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times (ف - ۱) = ضعف (ف) + ۱$$

$$\text{یعنی } ۱ + (ف - ۱) \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times (ف - ۱) = (ف - ۱) + ۱ = ضعف (ف) + ۱$$

$$\text{اس سے } [ف - ۱] = ضعف (ف) + ۱$$

یعنی ۱ + (ف - ۱) ف کا ضعف ہے۔

نتیجہ صریح - اگر ۲ ف + ۱ عدد مفرد ہو تو (ف) + ۱ (۱ - ا) تقسیم ہو سکتا ہے ۲ ف + ۱ پر۔

دسکن کے مسئلہ کی رو سے ۱ + ۲ ف تقسیم ہو سکتا ہے ۲ ف + ۱ پر

$$ن = ۲ ف + ۱ \text{ رکھو یعنی } ف + ۱ = ن - ف \text{ تب}$$

اِس سے فرما کے مسئلہ کا ایک نیا ثبوت حاصل ہوتا ہے کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر لا بلحاظ ف کے مفرد ہو تو لا^ف۔ اکف کا ضعف ہوگا۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $5^{2n} - 24n - 1$ - ۲۲ - ن - ۲۵ پورا تقسیم ہو سکتا

۴۶۵-۲۳-۲۵ کوفا (ن) سے تعبیر کرو

تب فا $(n+1) = 5^{n+1} - 2^{n+1} = 5(5^n - 2^n) + 5 - 2 = 5(25^n - 2^n) - 25 + 5 - 2 = 5(25^n - 2^n) - 22$

$$r_9 - \omega_1 r - r^2 \omega^2 \delta \times \delta =$$

$$29 - 22 - (25 + 22)25 = 25 - (1 + 22) = 25 - 23 = 2$$

$$(1 + \omega) 564 =$$

تقسیم ہو جائیگا، لیکن ہم جانچ کرنے سے دیکھتے ہیں کہ یہ مسئلہ اس لئے اگر فارن) ۵۷ء پر تقسیم ہو جائے تو فارن) ۱) بھی

دست ہے جبکہ $n = 1$ اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ $n = 2$
اس لئے یہ درست ہوگا جبکہ $n = 3$ اور علیٰ ہذا القیاس، پس یہ
ہر صورت میں درست ہے۔

مندرجہ بالا نتیجہ ذیل کے طریقہ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

$$r_5 - \omega r_2 - {}^{1+\omega}r_5 = r_5 - \omega r_2 - {}^{1+\omega}r_5$$

$$25 - 24 - (24 + 1)25 =$$

$$= 25 + 25 \times 6 + 25 \times 22 = 25(1 + 6 + 22)$$

٢٢-٢٥-

$$= 564 \text{ ن} + 566 \text{ ضوئیت}$$

= نصف (۱۵۷۶)

امثلہ نمبری ۳۰ (ب)

- ۱۔ ثابت کرو کہ $10 + 3 \times 3 + 2 + 5 = 5$ تقسیم ہو سکتا ہے ۹ پر۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ $2 \times 2 + 3 \times 5 = 5$ ضعف ہے ۲۲ کا۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ $2 \times 4 + 5 + 1 = 5$ کو جب ۲۰ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ۹ حاصل ہوتی ہے۔
- ۴۔ ثابت کرو کہ $8 \times 2 + 3 + 2 + 3 = 22$ (۱۲-۱) کی شکل کا ہے۔
- ۵۔ اگر n مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $2 \times (n-3) + 1 = n$ کا ضعف ہے۔
- ۶۔ ثابت کرو کہ $1 + 1 = 2$ تقسیم ہو سکتا ہے ۳ پر۔
- ۷۔ ثابت کرو کہ $1 - 1 = 0$ میں ۲ کی بڑی سے بڑی قوت ۲-۱ ہے۔
- ۸۔ ثابت کرو کہ $3 + 5 + 2 + 5 = 1$ ضعف ہے ۱۴ کا۔
- ۹۔ ثابت کرو کہ $3 + 5 + 2 + 5 = 14$ - ۵۶ - ۲۳۳ تقسیم ہو سکتا ہے
- ۱۰۔ ثابت کرو کہ $(1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5$ کی تفصیل میں لا کی طاق قوتوں کے سروں کا حاصل جمع n پر تقسیم ہو سکتا ہے جبکہ n کوئی عدد مفرد ہو بالاستثنائے ۵ کے۔
- ۱۱۔ اگر n ، ۷ سے بڑا کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $n - 1$ تقسیم ہو سکتا ہے ۵۰ پر۔
- ۱۲۔ اگر n کوئی طاق عدد ہو تو ثابت کرو کہ $n + 3 + 2 + 5 = n - 1$ ضعف ہے ۲۸ کا۔
- ۱۳۔ اگر n کوئی عدد مفرد ہو تو ثابت کرو کہ $(1 + 1) = 2$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے کسی ضعف کی نسبت بقدر ۱ کے متبادل بڑے چھوٹے ہیں۔
- ۱۴۔ n ایک عدد مفرد ہے، اور n عددوں کا ایک ایسا

سلسلہ حسابیہ ہے جس کا فرق مشترک $\frac{1}{n}$ پر تقسیم نہیں ہو سکتا۔
ثابت کر دو کہ ان عددوں کی $(n-1)$ ویں قوتوں کا حاصل جمع
 $\frac{1}{n}$ کے ایک ضعف سے بقدر ایک کے کم ہے۔

۱۵۔ نبات سرکہ ۱۲ - ب ۱۱ پر تقسیم ہو سکتا ہے اگر ا اور ب دونوں بلحاظ ۹۱ کے مفرد ہوں۔

۱۶۔ اگر ف مفرد ہو تو ثابت کرو کہ [ف-۲] [۲-۱] - ۱ تقسیم ہو سکتا ہے ف پر۔

۱۷۔ اگر (ن-۱) اور (ن+۱) دونوں مفرد عدد ہوں اور ۵ سے بڑے ہوں تو ثبات کرو کہ ن (ن-۲) تقسیم ہو سکتا ہے ۱۲۰ پر اور ن (ن+۱۶) تقسیم ہو سکتا ہے ۷۲۰ پر۔ نیز دکھاؤ کہ ن کی فصل ۳۰ تا ۳۰ یا ۳۰ تا ۱۲ ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ n کی بڑی سے بڑی قوت جو $(n-1)$ میں شامل ہے $\frac{n-1}{2}$ ہے۔

۱۹۔ اگر فن عدد مفرد ہو اور بلحاظ فن کے مفرد ہو اور نیز ایک مرتب عدد ج^۲ ایسا معلوم ہو سکتا ہو کہ ج^۲۔ ۱ تقسیم ہو سکے فن پر تو ثابت کر دو کہ (۱)۔ ۱ تقسیم ہو سکتا ہے فن پر۔

۲۰۔ استطابق

١٩٠٩-١-١٠ (مق ١٣٩)

کا عام حل دریافت کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ ایسے تمام اعداد کے مربعوں کا حاصل جمع جو ایک خاص عدد n سے گم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

$$\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\frac{e}{4} + \dots + \left(\frac{1}{j}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{a}-1\right)\frac{e}{3}$$

ہے اور کعبوں کا حاصل جمع

$\frac{1}{4} - (1 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{8} - (1 - \frac{1}{8}) + \frac{1}{16} - (1 - \frac{1}{16}) + \dots + \frac{1}{2^n} - (1 - \frac{1}{2^n}) + \dots$
 ہے جہاں ا، ب، ج، ... وغیرہ کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ہیں۔
 ۲۲۔ اگر ق اور ق دو مثبت صحیح عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

اق تق تقسیم ہو سکتا ہے (اق) پر (ق) (ق) پر (ق) (ق) پر

۲۳۔ ثابت کرو کہ ایسے مربع عدد جو شش عدد بھی ہوں
 کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مربعوں کے مساوی ہیں،
 اور دکھاؤ کہ ایسے مربع اعداد جو مخمس بھی ہوں $\frac{1}{5} - (1 - \frac{1}{5}) + \frac{1}{25} - (1 - \frac{1}{25}) + \dots$ کی تفصیل
 میں لا کی قوتوں کے سروں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایسے تمام عددوں کی جو تہی قوتوں کا حاصل جمع
 جو عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ اس کے مفرد ہوں

$\frac{1}{4} - (1 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{8} - (1 - \frac{1}{8}) + \frac{1}{16} - (1 - \frac{1}{16}) + \dots + \frac{1}{2^n} - (1 - \frac{1}{2^n}) + \dots$

۔ $\frac{1}{4} - (1 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{8} - (1 - \frac{1}{8}) + \frac{1}{16} - (1 - \frac{1}{16}) + \dots$

ہے جہاں ا، ب، ج، ع کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ہیں۔
 ۲۵۔ اگر ان صحیح اعداد کی تعداد کو جو عدد ع سے کم ہوں اور بلحاظ
 اس کے مفرد ہوں فد (ع) سے تعبیر کیا جائے اور اگر لا بلحاظ ع
 کے مفرد ہو تو ثابت کرو کہ

لا فد (ع) = ۱ - (مق ع)

۲۶۔ اگر کسی عدد ع کے مقسوم علیہ س، س، س، ... ہوں

تو دکاؤ که فہ (س_۱) + فہ (س_۲) + فہ (س_۳) + = ع
نیز ثابت کرو کہ

$$\text{فہ (۱)} - \frac{\text{لا}}{\text{لا} + ۱} \text{فہ (۳)} + \frac{\text{لا}}{\text{لا} + ۱} \text{فہ (۵)} - \dots \dots \dots \text{تا لا تہای}$$

$$\frac{\text{لا (۱ - لا)}}{\text{لا (لا + ۱)}} =$$



اکتیسواں باب

مسل کسور کا عام نظریہ

۴۳۶۔ پچیسویں باب میں ہم نے جن مسل کسروں پر بحث کی ہے وہ اس شکل کی تھیں: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$ جہاں $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ مثبت صحیح عدد ہیں اور $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ کوئی مثبت صحیح عدد ہے یا صفر کے مساوی ہے۔ اب ہم زیادہ عام شکل کی مسل کسروں پر بحث کرتے ہیں۔

۴۳۷۔ مسل کسور کی عام سے عام شکل $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots$ ہے جہاں $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \dots$ کوئی مقداریں ہیں۔

کسور $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \dots$ کو مسل کسور کے اجزائے ترکیبی کہتے ہیں، ہم اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھتے ہیں (۱) وہ صورت جس میں ہر جزو ترکیبی کی علامت مثبت ہے (۲) وہ صورت جس میں ہر جزو ترکیبی کی علامت منفی ہے۔

۴۳۸۔ مسل کسور

ب ب ب
+ + +
.....
کے متواتر مستقوں کے بنانے کا کلیہ دریافت کرو۔
پہلے تین مستق یہ ہیں۔

$$\frac{ب}{۱}، \frac{ب}{۱+ب}، \frac{ب}{۱+ب+ب}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مستق کا شمار کنندہ دوسرے مستق کے شمار کنندہ کو ب سے اور پہلے مستق کے شمار کنندہ کو ب سے ضرب دیکر دونوں حاصل ضربوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے نیز تیسرے مستق کا نسب نما بھی اسی طرح حاصل ہوتا ہے۔
فرض کرو کہ متواتر مستق اسی طرح سے بنائے گئے ہیں،
ان کے شمار کنندوں کو ق، ق، ق، سے اور نسب نماؤں کو ل، ل، ل، سے تعبیر کرو۔

یہ تسلیم کرو کہ کلیہ بالا ن ویں مستق کے لئے صحیح ہے، یعنی
فرض کرو کہ ق = $\frac{ب}{۱+ب}$ اور ل = $\frac{ب}{۱+ل}$
(ن + ۱) واں مستق ن ویں مستق سے حرف اس لحاظ سے
مختلف ہے کہ اول الذکر میں ل کی بجائے $\frac{ب}{۱+ل}$ ہے اسلئے

(ن + ۱) واں مستق

$$\frac{ق + \frac{ب}{۱+ل} ق}{ل + \frac{ب}{۱+ل} ل} = \frac{ق + \frac{ب}{۱+ل} ق}{ل + \frac{ب}{۱+ل} ل}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{لہذا اگر ہم } \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \text{ ق } \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \text{ ب } \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \text{ ق}$$

$$\text{اور } \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \text{ ل } \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \text{ ب } \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \text{ ل}$$

رکھیں تو ظاہر ہے کہ $(1 + \frac{1}{n})$ میں مستحق کا شمار کنندہ اور
نسب نما اسی کلمہ کے ماتحت بنتے ہیں جو n میں مستحق
کی صورت میں تسلیم کیا گیا تھا۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ کلمہ
تیسرے مستحق کے لئے درست ہے، لہذا یہ چوتھے مستحق
کے لئے درست ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ پس یہ عام طور پر

درست ہے۔ سلسل کسر

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

کی صورت میں ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\text{اور } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2}$$

یہ نتیجہ دفعہ ماقبل کے نتیجہ سے محض $\frac{1}{2}$ کی علامت بدلنے
سے حاصل ہو سکتا ہے۔

$$\text{۳۴۰۔ سلسل کسر } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$ق = ل_1 ق + ب_1 ق_2 \quad اور \quad ل = ل_1 ل + ب_1 ل_2$$

$$\therefore \frac{ق}{ل} = \frac{ل_1 ق + ب_1 ق_2}{ل_1 ل + ب_1 ل_2} = \frac{ق (ل_1 + \frac{ب_1 ق_2}{ق})}{ل_1 (ل + \frac{ب_1 ل_2}{ل_1})}$$

$$= \frac{ب_1 ل_2}{ل_1 (ل + \frac{ب_1 ل_2}{ل_1})} \left(\frac{ق}{ل} - \frac{ق_2}{ل_2} \right)$$

لیکن $\frac{ب_1 ل_2}{ل_1 (ل + \frac{ب_1 ل_2}{ل_1})} = \frac{ب_1 ل_2}{ل_1 ل + ب_1 ل_2}$ جو ایک کسروا جبتیٰ لہذا

$$\frac{ق}{ل} - \frac{ق_2}{ل_2} = \frac{ق}{ل} \quad \text{تعداداً کم ہے} \quad \frac{ق}{ل} - \frac{ق_2}{ل_2}$$

اور بلحاظ علامت اس سے مختلف ہے۔
اسی قسم کے استدلال سے جو دفعہ ۳۳۵ میں کیا گیا ہے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ طاق رتبہ کا ہر مستحق سلسلہ کسروں سے بڑا ہوتا ہے اور جفت رتبہ کا ہر مستحق سلسلہ کسروں سے چھوٹا ہوتا ہے، پس طاق وین رتبہ کا ہر ایک مستحق جفت وین رتبہ کے ہر ایک مستحق سے بڑا ہوتا ہے۔

مثلاً $\frac{ق}{ل} - \frac{ق_2}{ل_2}$ مثبت ہے اور $\frac{ق}{ل} - \frac{ق_2}{ل_2}$ سے

کم ہے، لہذا $\frac{ق}{ل} > \frac{ق}{ل}$ $\frac{۱-۵۲}{۱-۵۲}$

نیز $\frac{ق}{ل} - \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲}$ مثبت ہے اور $\frac{ق}{ل} - \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲}$ سے $\frac{ق}{ل} - \frac{۱-۵۲}{۱-۵۲}$

کم ہے، لہذا $\frac{ق}{ل} < \frac{ق}{ل}$ $\frac{۲-۵۲}{۲-۵۲}$

پس طاق وین رتبہ کے سب مستحق سلسلہ کسر سے بڑے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ لیکن جفت وین رتبہ کے سب مستحق سلسلہ کسر سے چھوٹے ہوتے ہیں اور ان کی قیمت بتدریج بڑھتی جاتی ہے۔ اب قرض کرد کہ اجزائے تیرہ کی تعداد لا انتہا ہے، تب طاق وین رتبہ کے مستحقوں کی کوئی محدود انتہا ہوگی اور جفت وین رتبہ کے مستحقوں کی بھی کوئی محدود انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہا میں مساوی ہوں تو کسر سلسلہ کی ایک معین انتہا ہوگی۔ اگر یہ انتہا میں مساوی نہ ہوں یعنی طاق وین مستحقوں کی انتہا اور ہو اور جفت وین مستحقوں کی کچھ اور تو سلسلہ کسر کو اتھرازی کسر کہا جاسکتا ہے، اس صورت میں کسر مذکور دو ایسی مفادیر کو علامتوں کے ذریعہ تعبیر کرتی ہے جن میں سے ایک جفت مستحقوں کی انتہا ہے اور دوسری طاق مستحقوں کی

۴۴۱۔ ثابت کرو کہ سلسلہ کسر $\frac{ب}{ب}$ $\frac{ب}{ب}$ $\frac{ب}{ب}$ کی ایک معین انتہا ہوگی اگر $\frac{ب}{ب}$ کی انتہا جبکہ $\frac{ب}{ب}$ لا انتہا

بڑا ہو صفر سے بڑی ہو۔

سلسل کسری کی قیمت ایک خاص معین مقدار ہوگی اگر $\frac{ق}{ل}$ اور $\frac{ق+۱}{ل+۱}$

کی انتہائوں کا فرق جبکہ $ن$ لا انتہا بڑا ہو جائے صفر ہو۔

$$اب \frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} = \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱} = \left(\frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} \right) \frac{ب}{ل+۱}$$

$$اسی طرح \frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} = \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱} = \left(\frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} \right) \frac{ب}{ل+۱}$$

$$\dots \times \frac{ب}{ل} \times \frac{ب+۱}{ل+۱} \times \left(\frac{ق}{ل} - \frac{ق+۱}{ل+۱} \right)$$

$$لیکن \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱} = \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱} = \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱}$$

$$اور \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱} = \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱}$$

$$\frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱} = \frac{ب}{ل+۱} - \frac{ب+۱}{ل+۱}$$

نیز ان رقموں میں سے کوئی رقم منفی نہیں ہو سکتی اسلئے

اگر $\frac{1}{1+n}$ کی انتہا صفر سے بڑی ہو تو $\frac{1}{1+n}$ کی انتہا بھی صفر سے بڑی ہوگی، اس صورت میں

$\frac{1}{1+n}$ کی انتہا ایک سے کم ہوگی۔ لہذا

$\frac{1}{1+n}$ کی قیمت لا انتہا کسور واجب کے

حاصل ضرب کی انتہائی قیمت کے مساوی ہوگی گویا صفر ہوگی۔ یعنی $\frac{1}{1+n}$ اور $\frac{1}{1+n}$ کی انتہائیں ایک ہی

ہوں گی۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔ مثلاً کسر مسلسل

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$\text{میں نہا} = \frac{1}{1+n} = \frac{(1+n)(1+n)}{(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2}$$

لہذا کسر مذکور کی ایک معین انتہا ہے۔

۴۴۲۔ اگر مسلسل کسر $\frac{1}{1+n}$ کا

میں ہر ایک جزو ترکیبی کا مثبت نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو مستحق مثبت کسریں ہوں گی جو بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہوں گی۔

مب مفروض $\frac{ب}{ا}$ ، $\frac{ب}{ب}$ ، $\frac{ب}{ج}$... سب واجب کسریں ہیں جن میں سے ہر ایک کا قسب کا شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہے۔ دوسرا مستق $\frac{ب}{ب}$ ہے۔

اور چونکہ $\frac{ب}{ا}$ سے کم از کم بقدر ا کے بڑا ہے اور $\frac{ب}{ب}$ کسر واجب ہے اسلئے $\frac{ب}{ب}$ بڑا ہے $\frac{ب}{ب}$ سے، یعنی دوسرا مستق مثبت کسر واجب ہے اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ $\frac{ب}{ج}$ کسر واجب ہے، اس کو ک سے

تغیر کرو، تب تیسرا مستق $\frac{ب}{ج}$ ہے، اس لئے یہ بھی مثبت کسر واجب ہے اسی طرح سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$\frac{ب}{ا}$ ، $\frac{ب}{ب}$ ، $\frac{ب}{ج}$ مثبت کسر واجب ہے اسلئے جو تھا مستق

$\frac{ب}{ا}$ ، $\frac{ب}{ب}$ ، $\frac{ب}{ج}$ بھی مثبت کسر واجب ہے اور علیٰ ہذا قیاس۔

نیز $\frac{ق}{ا} = \frac{ق}{ب}$ ، $\frac{ق}{ب} = \frac{ق}{ج}$ ، $\frac{ل}{ا} = \frac{ل}{ب}$ ، $\frac{ل}{ب} = \frac{ل}{ج}$

$$\frac{\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}}{\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}} = \frac{ب}{۱-۵} - \frac{ب}{۱-۵} = \frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}$$

لہذا $\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}$ اور $\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}$ کی علامت ایک ہی ہے

$$\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵} = \frac{ب}{۱-۵} - \frac{ب}{۱-۵} = \frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}$$

لیکن $\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵} = \frac{ب}{۱-۵} - \frac{ب}{۱-۵} = \frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}$

یہ مثبت ہے لہذا $\frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵} < \frac{ق}{۱-۵} - \frac{ق}{۱-۵}$

اور علیٰ ہذا القیاس - پس مسئلہ ثابت ہوا -
 نتیجہ صریح - اگر اجزائے ترکیبی کی تعداد لامتناہی ہو تو مستند
 کسوز واجب کا ایک لامتناہی سلسلہ بناتے ہیں جو بلحاظ مقدار
 صعودی ترتیب میں ہوتا ہے اور اس صورت میں کسروں کا سلسلہ
 کی انتہا ایک معین مقدار ہوتی ہے جو ایک سے بڑی نہیں
 ہو سکتی -
 ۴۴۴ ضابطہ

$$\frac{ق}{۱-۵} + \frac{ب}{۱-۵} = \frac{ق}{۱-۵} + \frac{ب}{۱-۵} = \frac{ق}{۱-۵} + \frac{ب}{۱-۵}$$

سے ہم بالتواتر جتنے مستند چاہیں معلوم کر سکتے ہیں - تاہم
 بعض صورتوں میں ن وین مستند کے لئے ایک عام جملہ
 معلوم کیا جاسکتا ہے -

$$\frac{۶}{-۵} - \frac{۶}{-۵} = \frac{۶}{-۵} - \frac{۶}{-۵} = \frac{۶}{-۵} - \frac{۶}{-۵}$$

مثال - $\frac{۶}{-۵} - \frac{۶}{-۵} = \frac{۶}{-۵} - \frac{۶}{-۵}$ کا ن وین مستند معلوم کر دے
 ہیں معلوم ہے کہ $\frac{۶}{-۵} - \frac{۶}{-۵} = \frac{۶}{-۵} - \frac{۶}{-۵}$ پس شمار کنندہ

کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے سروں کے مساوی ہیں اور
نسب نما $\frac{1+2}{1-2}$ کی تفصیل میں لا کی قوتوں کے
سروں کے مساوی ہیں۔

۴۴۴۔ قی اور لی کی عام قیمتوں کی تحقیق کے متعلق
طالب علم کو چاہئے کہ محدود فرقوں (فالٹ نائٹ ڈفرنسز)
پر کتب ریاضی کا مطالعہ کرے۔ الجبر کے ذریعہ یہ قیمتیں صرف
خاص خاص صورتوں میں معلوم ہوسکتی ہیں۔ ذیل کا طریقہ
بعض اوقات مفید ثابت ہوگا۔

مثال۔ $\frac{1}{1+1} \frac{2}{2+2} \frac{3}{3+3} \dots$
قی اور لی دونوں کے بنانے کا ایک ہی قاعدہ ہے۔ فرض
کرد کہ ان دونوں میں سے کسی کو عی سے تعبیر کیا جاتا ہے،
تب عی = ن عی + ن عی - ۱

یا عی - (ن + ۱) عی - ۱ = (ن عی - ۱) عی - ۱
اسی طرح عی - ن عی - ۱ = (ن عی - ۱) عی - ۱

عی - ۲ عی - ۱ = (ن عی - ۱) عی - ۱
ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

عی - (ن + ۱) عی - ۱ = (ن عی - ۱) عی - ۱
پہلے دو مستحق $\frac{1}{1}$ اور $\frac{2}{2}$ ہیں، اس لئے

ایسا ہونا ناممکن ہے، پس مفروضہ کسریں مسلسل متوافق نہیں ہو سکتی مندرجہ بالا نتیجہ اس صورت میں بھی برقرار رہتا ہے اگر بعض جزو ترکیبی واجب کسریں نہ ہوں بشرطیکہ ایک خاص جزو ترکیبی سے شروع ہو کر اس کے بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب کسریں ہوں۔ اسے ہم اس طرح دیکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو $\frac{ب}{ل}$ اور بعد کے سب اجزائے ترکیبی واجب کسریں ہیں، پس جیسا کہ ابھی ہم نے ثابت کیا ہے کہ وہ کسریں مسلسل جو $\frac{ب}{ل}$ سے شروع ہوتی ہے متبائن ہے، اس کو $ک$ سے تعبیر کرو، تب $\frac{ق}{ل}$ کے جواب میں جو مکمل خارج قسمت ہے وہ $\frac{ق}{ل}$ ہے اور اس لئے کسریں مسلسل کی قیمت $\frac{ق-۱}{ل} + \frac{ق-۲}{ل} + \dots + \frac{ق-۲}{ل}$ ہے۔

یہ متوافق نہیں ہو سکتی تا وقتیکہ $\frac{ق-۱}{ل}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۲}{ل}$ کے اور یہ ہونہیں سکتا تا وقتیکہ $\frac{ق-۲}{ل}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۳}{ل}$ کے

$\frac{ق-۳}{ل}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۴}{ل}$ کے، اور بالآخر $\frac{ق-۲}{ل}$ برابر نہ ہو $\frac{ق-۱}{ل}$ کے یعنی $\frac{ق-۲}{ل}$ برابر نہ ہو صفر کے جو ناممکن ہے لہذا مفروضہ کسر لازماً متبائن ہے۔

۴۴۶ - اگر کسریں مسلسل $\frac{ب}{ل}$ $\frac{ب}{ل}$ $\frac{ب}{ل}$ کا ہر ایک جزو ترکیبی کسر واجب ہو جس کا شمار کنندہ اور نسبنا

صحیح عدد ہوں اور اگر کسی خاص جزو ترکیبی سے شروع ہو کر اس لامتناہی کسر کی قیمت ایک سے کم ہو تو کسر متناہی ہوگی۔
ثبوت کی سلب استدلال دفعۃً ماقبل کی مانند ہے۔

امثلہ نمبری ۳۱ (۱)

۱۔ ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

میں $Q = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ اور $L = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

۲۔ $\left(\frac{1+2}{1}\right)$ کو ایک ایسی مسلسل کسر کی شکل میں لاؤ جس میں

سب شمار کنندگان ایک کے مساوی ہوں۔

۳۔ ثابت کرو کہ

$$(1) \sqrt{1+2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$(2) \sqrt{1-2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$$

۴۔ کسر مسلسل $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ میں اگر ہر ایک

جزو ترکیبی کا نسب نما شمار کنندہ سے کم از کم بقدر ایک کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ Q اور L کی قیمت N کے ساتھ بڑھتی ہے۔

۵۔ اگر $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$r_2 = (1 - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2} - \dots) + (1 + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} + \dots)$$

اور $(1 + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} + \dots)(1 - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2} - \dots) = 1 - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2} - \dots$

۷۔ کسیر سلسل

$$\frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \dots$$

میں ثابت کرو کہ

$$q = \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \dots = \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \dots$$

۸۔ ثابت کرو کہ $\frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \dots = \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \frac{b}{r} + \dots$

۹۔ اجزاء ترکیبی کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے اور عام اور بہ مساوات

ک' - ا' - ب = ۰

کی اصلیں ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ سلسل کسروں

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \dots = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \dots$$

۱۰۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{(1+n)(2+n)(3+n)}{6} = \frac{(1-n)}{(1+n)} \dots \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6}$$

$$\frac{(3+n)n}{2} = \frac{1-n}{1+n} \dots \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \dots = \frac{1+n}{2+n} \frac{1+n}{1+n} \dots \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6}$$

۲۰۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{-5} - \frac{1}{-2} + \frac{1}{-1} - \frac{1}{-5} + \frac{1}{-2} - \frac{1}{-1} + \frac{1}{-5} - \dots$$

کا ۳ ن وال مستق $\frac{3}{1+n}$ ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{+2} + \frac{1}{+3} + \frac{1}{+4} + \dots = \frac{2}{9} - \frac{3}{9} = \frac{2}{9} - \frac{1}{3}$ اور اس سے حال کرو کہ فوق کی قیمت $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان واقع ہے۔

سلسلوں کی تحویل مسلسل کسروں میں

۲۲۔ یہاں سلسلہ کو ذیل کی شکل

$$\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3} + \dots + \frac{1}{ع_n}$$

میں لکھنا سہولت بخش ہے۔

$$\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} = \frac{1}{ع_1 + ع_2}$$

$$\text{تب } (ع_1 + ع_2) (ع_3 + ع_4) = ع_1 + ع_3 + ع_2 + ع_4$$

$$\therefore ل_1 = \frac{ع_3}{ع_1 + ع_3} + \frac{ع_4}{ع_2 + ع_4}$$

$$\therefore \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} = \frac{1}{ع_1 + ع_2} = \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2}$$

اسی طرح سے

$$\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3} = \frac{1}{ع_1 + ع_2 + ع_3} = \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3}$$

$$= \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2 + ع_3} = \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2 + ع_3}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، اس لئے عام طور پر

$$\frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2} + \frac{1}{ع_3} + \dots + \frac{1}{ع_n} = \frac{1}{ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n}$$

$$= \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n} = \frac{1}{ع_1} + \frac{1}{ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n}$$

مثال ۱۔ سلسلہ ذیل

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$$

کو کسریہ مسلسل کی شکل میں لاؤ۔

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2+1}$$

$$\text{تب } \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3+1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3+1}$$

$$\text{اس لئے } \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{b}{a(a+b)} \\ & \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{b}{a(a+b)} \\ & \text{اور عام طور پر } \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{b}{a(a+b)} \\ & \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{b}{a(a+b)} \\ & \text{مثال ۲۔ لوگ (۱+۱) کو مسلسل کسر کی شکل میں تبدیل کرو۔} \\ & \text{ہم جانتے ہیں کہ لوگ (۱+۱) = ۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots \\ & \text{سلسلہ ذیل} \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots \\ & \text{کے مساوی اجماع مسلسل ہے اس سے مطلوبہ کسر مسلسل} \\ & \text{بآسانی حاصل ہو سکتی ہے۔} \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ & \text{اس سے مان = } \frac{1}{4} \\ & \text{پس } \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

امثلہ نمبری ۳۱ (ب)

ثابت کرو کہ

$$1 - \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

$$2 - \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

$$3 - \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

$$4 - \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

$$5 - \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

$$6 - \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

$$7 - \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

$$8 - \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_3} + \frac{1}{e_4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{e_n}$$

بتیسوں با

احتمال

۴۴۹۔ اگر کوئی واقعہ $\frac{1}{2}$ طریقوں سے واقع ہو سکے اور $\frac{1}{2}$ طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ (واقع اور عدم وقوع دونوں کے ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کو یوں بیان کرنے ہیں کہ اس واقعہ کے وقوع کا احتمال یا اتفاق $\frac{1}{2}$ ہے اور عدم وقوع کا $\frac{1}{2}$ ۔

مثلاً ایک قرعہ میں ۷ انعام ہیں اور باقی ۲۵ خالی ہیں، اگر ایک شخص کے پاس ایک ٹکٹ ہو تو اس کے ایک انعام حاصل کرنے کا اتفاق $\frac{1}{26}$ ہے اور اس کے محروم رہنے کا اتفاق $\frac{25}{26}$ ہے۔
۴۵۰۔ ریاضی میں احتمال کی مندرجہ بالا تعریف کے وجوہ ذیل کے امور پر غور کرنے سے بخوبی واضح ہو جائینگے۔

اگر ایک واقعہ $\frac{1}{2}$ طریقوں سے واقع ہو سکے اور $\frac{1}{2}$ طریقوں سے واقع نہ ہو سکے جبکہ ہر طریقہ کا امکان مساوی ہو تو اس کے وقوع کے اتفاق کی نسبت اس کے عدم وقوع کے اتفاق کے ساتھ $\frac{1}{2}$ ہے، پس اگر واقع ہونے کے اتفاق کو $\frac{1}{2}$ سے تعبیر کیا جائے تو واقع نہ ہونے کے اتفاق کو $\frac{1}{2}$ سے تعبیر کیا جائیگا جہاں $\frac{1}{2}$ کوئی نامعلوم مستقل عدد ہے۔

۱۔ وقوع کا اتفاق + عدم وقوع کا اتفاق = م (۱ + ب) لیکن ان دو میں سے ایک نہ ایک بات کا ہونا لازمی ہے، یا واقعہ واقع ہوگا یا نہ ہوگا۔ لہذا صور ہے کہ واقع ہونے کے اتفاق اور واقع نہ ہونے کے اتفاق کا حامل جمع ایک مقدار یقینی کو تعبیر کرے، پس اگر ہم اس مقدار کو اکائی فرض کریں تو

$$۱ = م (۱ + ب) \text{ یعنی } م = \frac{۱}{۱ + ب}$$

$$۲۔ واقعہ کے واقع ہونے کا اتفاق = \frac{۱}{۱ + ب}$$

$$\text{اور واقع نہ ہونے کا اتفاق} = \frac{ب}{۱ + ب}$$

نتیجہ صریح۔ اگر کسی واقعہ کے وقوع کا احتمال ق ہو تو اسکے عدم وقوع کا احتمال ا۔ ق ہوگا۔
۴۵۱۔ یہ کہنے کی بجائے کہ کسی واقعہ کے وقوع کا اتفاق

$\frac{۱}{۱ + ب}$ ہے اس کو بعض اوقات یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ

واقعہ کے موافق امکان ۱ : ب ہے اور خلاف ب : ا ہے۔

احتمال کی تعریف مندرجہ ذیل ۴۴۹ قدرے مختلف شکل میں بھی دی جاسکتی ہے جو بعض اوقات مفید ثابت ہوتی ہے، اگر امکان کی کل صورتوں کی مجموعی تعداد ج ہو اور ہر صورت

کا امکان مساوی ہو تو وقوع کا احتمال $\frac{۱}{ج}$ سے اور عدم وقوع

کا احتمال ا۔ $\frac{۱}{ج}$ سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ا۔ ایک معمولی مہرہ کے چہرہ رخوں پر ایک سے چہتک کے ہندسے

مندرج ہیں۔ اگر اس کو پھینکا جائے تو بتاؤ کہ ۴ سے بڑا عدد نکلنے کا احتمال کیا ہے۔
مہرہ کے گرنے کے کل مختلف طریقے ۶ ہیں اور ان میں سے ۲ موافق ہیں۔

۱۔ مطلوبہ احتمال = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ۴ سفید گیند ہیں اور ۵ سیاہ، ایک شخص بن دیکھے ان میں سے ۳ گیند نکالتا ہے۔ بتاؤ کہ ان گیندوں کے سب سیاہ ہونے کے خلاف کیا امکان ہیں۔
تین گیند نکالنے کے کل طریقے ۹ ج ہیں، اور تین سیاہ گیند نکالنے کے کل طریقے ۵ ج ہیں۔ اس لئے تین سیاہ گیند نکالنے کا احتمال

$$\frac{5}{9} = \frac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{9}$$

پس واقعہ کے خلاف امکان ۳:۵ ہے۔
مثال ۳۔ دو مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ کم از کم ایک یکہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
کل ممکن صورتوں کی تعداد $2 \times 2 = 4$ ہے۔

ایک مہرہ پر کا یکہ دوسرے مہرہ پر کے چہم عددوں میں سے کسی ایک کے ساتھ اٹکھا نکل سکتا ہے اور پہلے مہرہ پر کے باقی ۵ عددوں میں سے ہر ایک عدد باقی دوسرے مہرہ کے یکہ کے ساتھ نکل سکتا ہے۔ پس موافق صورتیں صرف ۱۱ ہیں۔

اس لئے مطلوبہ احتمال $\frac{11}{16}$ ہے
ہم یوں بھی استدلال کر سکتے ہیں:-
ہر ایک مہرہ کو اس طرح پھینکنے کے لئے کہ یکہ نہ نکلے پانچ طریقے ہیں۔ پس مہروں کے ۲۵ "اقاد" ایسے ہیں جس میں یکہ نہیں نکلیگا۔

یعنی کم از کم ایک کیک کی افتاد کا احتمال ۱ - $\frac{25}{36}$ یا $\frac{11}{36}$ ہے۔

مثال ۲۔ تین مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں، بتاؤ کہ ۱۵ سے زیادہ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

جس افتاد میں ۱۸ نکل سکتے ہیں وہ ۶، ۶، ۶ سے بنی ہوئی ہے، اور یہ صرف ایک ہی طریقہ سے ہو سکتا ہے۔ ۱۴ چونکہ ۶، ۶، ۶ سے بنتا ہے، اس لئے یہ صرف ۳ طریقوں سے ہو سکتا ہے، اسی طرح ۱۶ اعداد ۶، ۶، ۴ اور ۵، ۵، ۶ سے بن سکتا ہے اور ہر ایک جٹ ۳ طرح سے واقع ہو سکتا ہے۔

پس موافق صورتوں کی کل تعداد $1 + 3 + 6 = 10$ ہے اور کل صورتیں $6 \times 6 \times 6$ یعنی ۲۱۶ ہے۔

$$\text{لہذا مطلوبہ احتمال} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

مثال ۵۔ ایک ایسے قرعہ میں جس میں ۳ انعام ہیں اور ۶ خالی ہیں ۱ کے تین حصے ہیں، ایک دوسرے قرعہ میں جس میں ایک انعام ہے اور ۲ خالی ہیں ۲ کا ایک حصہ ہے، ثابت کرو کہ ۱ کی کامیابی کے احتمال کو ۲ کی کامیابی کے احتمال کے ساتھ نسبت ۱۶:۹ ہے۔

۱ کے تین انعام حاصل کرنے کا طریقہ ایک ہے۔

۱ کے دو انعام اور ایک خالی حاصل کرنے کے طریقے $\frac{2 \times 3}{2 \times 1} \times 6$ ہیں۔

۱ کے ایک انعام اور دو خالی حاصل کرنے کے طریقے $\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3$ ہیں۔

ان کل طریقوں کا حاصل جمع ۶۳ ہے جو ۱ کے کم از کم ایک انعام حاصل کرنے کے کل طریقوں کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز ۱۶:۹

ٹکٹ $\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}$ یعنی ۸۴ طریقوں سے حاصل کر سکتا ہے

پس ا کی کامیابی کا احتمال $\frac{62}{84} = \frac{31}{42}$ ہے۔

نیز ب کی کامیابی کا احتمال عسریاً $\frac{1}{11}$ ہے،
پس ا کی کامیابی کا احتمال: ب کی کامیابی کا احتمال $= \frac{1}{11} = \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$ ہے۔
ہم اس طرح بھی استدلال کر سکتے تھے۔

ا کے تمام خالی $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$ یعنی ۲۰ طریقوں سے نکلتے۔ اسلئے

ا کے محروم رہنے کا احتمال $\frac{1}{20}$ یعنی $\frac{1}{20}$ ہے۔

پس ا کی کامیابی کا احتمال $= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$ ہے۔

۴۵۳۔ فرض کرو کہ ا، ب، ج، ایسے واقعات ہیں کہ ان میں سے ایک اور صرف ایک کا واقع ہونا لازمی ہے، نیز فرض کرو کہ یہ واقعات بالترتیب ا، ب، ج، طریقوں سے واقع ہو سکتے ہیں اور ان طریقوں میں سے ہر ایک کا امکان مساوی ہے، ہر ایک واقعہ کے وقوع کا احتمال دریافت کرو۔
مساوی امکان کے سب طریقوں کا مجموعہ ا، ب، ج، ہے ان میں سے وہ طریقے جو ا کے موافق ہیں ا نہیں۔ پس

ا کے وقوع کا احتمال $\frac{1}{1 + 1 + 1 + \dots}$ ہے اسی طرح سے

ب کے وقوع کا احتمال $\frac{1}{1 + 1 + 1 + \dots}$ ہے، وغیرہ وغیرہ

۴۵۴۔ جو مثالیں ہم نے اوپر دج کی ہیں ان سے ظاہر ہے کہ احتمال کے آسان سوالات کے حل کرنے میں صرف احتمال کی تعریف اور ترتیب و اجتماع کے اصولوں سے جاننے کی ضرورت ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (۱)

- ۱۔ بتاؤ کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے (۱) پانچ (۲) چہرے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۲۔ تاش کے ۵۲ پتوں سے کوئی دو پتے نکالے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک کے غلام، اور دوسرے کے ڈبلیگم ہونیکا کیا احتمال ہے۔
- ۳۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید، سیاہ اور ۴ سرخ گیند ہیں۔ اگر ۳ گیند علی الحساب نکالے جائیں تو ان تینوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۴۔ چار سیکوں کو اوپر اچھالا گیا ہے بتاؤ کہ دو مورتوں اور دو زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے؟
- ۵۔ دو واقعات ایسے ہیں کہ ان میں ایک ضرور واقع ہوگا۔ اگر یہ معلوم ہو کہ ایک کا احتمال دوسرے کے احتمال کا دو تہائی ہے تو بتاؤ کہ دوسرے واقعہ کے موافق کیا امکان ہے؟
- ۶۔ ایک تاش میں سے ۴ پتے لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ان کے ایک ہی ”رنگ“ کے چار افسر ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۷۔ ۱۳ آدمی ایک گول میز کے گرد بیٹھے ہیں، بتاؤ کہ دو خاص آدمیوں کے پاس پاس بیٹھنے کے خلاف امکان ۵:۱ ہے۔
- ۸۔ تین واقعات ا، ب، ج ایسے ہیں کہ ان میں سے ایک اور صرف ایک ضرور واقع ہوگا اگر اسے خلاف امکان ۸:۳ ہو اور ب کے خلاف امکان ۵:۲ ہو تو بتاؤ ج کے خلاف کیا امکان ہوگا؟
- ۹۔ ایک مہرہ کو پھینکنے سے ۴ نکلنے کا جو احتمال ہے دو مہروں کو پھینکنے سے ۸ نکلنے کا جو احتمال ہے، ۳۰ مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۱۲ نکلنے کا جو احتمال ہے ان سب کا

- باہم مقابلہ کرو۔
- ۱۰۔ ایک تاش کے ملانے میں ۴ تے اتفاق سے گر گئے ہیں، بتاؤ ان کے جداگانہ ایک ایک رنگ کتنے ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۱۱۔ ایک قرعہ میں ۳ انعام ہیں اور ۹ خالی ہیں، اس کے لئے ۱۰ کے پاس ۳ حصے ہیں، اسی طرح ایکس اور قرعہ میں ۲ انعام اور ۶ خالی ہیں اور اس کے لئے ب کے پاس ۲ حصے ہیں ان کی کامیابی کے احتمال کا مقابلہ کرو۔
- ۱۲۔ دکھاؤ کہ ۴، ۳ اور ۲ مہروں کو پھینک کر ۶ نکلانے کے احتمال بالترتیب نسبت ۱:۶:۱۸ میں ہیں۔
- ۱۳۔ تین کتابیں ہیں جن میں ایک کی تین جلدیں ہیں دوسری کی چار اور تیسری کی ایک۔ ان کو علی الحساب ایک الماری میں رکھا گیا ہے، بتاؤ کہ ہر ایک کتاب کی جلدوں کے اکٹھا ہونے کا احتمال کیا ہے۔
- ۱۴۔ ۱ اور ب میں سے ہر ایک دو مہرے پھینکتا ہے، اگر ۱، ۹ پھینکے تو بتاؤ کہ ب کے اس سے زیادہ پھینکنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۱۵۔ لفظ ”مصاحبوں“ کے حروف کو جدا جدا کر کے میسر پر رکھا گیا ہے، بتاؤ کہ حروف علت (ا اور و) کے پاس پاس آنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۱۶۔ تاش کی ایک ”ٹرب“ کی بازی میں جس کے تے ایک ایک کر کے تقسیم کئے گئے ہیں بتاؤ کہ ایک خاص شخص کے پاس چار ”بادشاہ“ ہونے کا کیا احتمال ہے
- ۱۷۔ ۴ شلنگ اور ۳ نصف کراؤں ایک قطار میں علی التناوب رکھے گئے ہیں، بتاؤ کہ سروں پر کے دونوں سکون کے نصف کراؤں ہونے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے، اس نتیجہ کی م شلنگ اور ن نصف

کراؤں کی صورت میں تقسیم کرد۔

۴۵۵۔ اب تک ہم نے صرف انہی واقعات پر غور کیا ہے جنکو احتمال کی زبان میں مفرد واقعات سے موسوم کرتے ہیں، اگر ان میں سے دو یا زیادہ واقعات ایسے ہوں کہ ان کے وقوع باہم متعلق ہوں تو اس مشترک وقوع کو مرکب واقعہ کہتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک تھیلی میں پانچ سفید اور آٹھ سیاہ گیند ہیں اس میں سے دو دفعہ تین تین گیند نکالے گئے ہیں، اگر ہم پہلے تین سفید گیندوں کے اور پھر تین سیاہ گیندوں کے نکالنے کا احتمال معلوم کرنا چاہیں تو ہماری بحث مرکب واقعہ سے متعلق ہوگی۔

ایسی صورت میں ممکن ہے کہ پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ دوسری دفعہ کے نکالنے کے نتیجہ پر اثر انداز نہ ہو۔ ظاہر ہے کہ اگر ان گیندوں کو جو پہلی دفعہ نکالے گئے ہیں واپس رکھ دیا جائے تو دوسری مرتبہ کے نکالنے پر پہلی دفعہ کے نکالنے کا نتیجہ کوئی اثر نہ ڈالے گا۔ لیکن اگر گیندوں کو واپس نہ رکھا جائے تو ظاہر ہے کہ اگر پہلی دفعہ تینوں گیند سفید نکلیں تو باقی ماندہ سیاہ گیندوں کو سفید گیندوں کے ساتھ جو نسبت ہوگی وہ اس نسبت سے زیادہ ہوگی جبکہ پہلی دفعہ کے تینوں گیند سفید نہ ہوں۔ اس صورت میں دوسری مرتبہ سیاہ گیند نکالنے کا احتمال پہلی دفعہ کے نتیجہ سے اثر پذیر ہوگا۔

اس کی باقاعدہ تعریف ہم ذیل میں درج کرتے ہیں۔
اگر ایک واقعہ کا وقوع دوسرے واقعہ پر اثر انداز ہوا ہو تو ان واقعات کو واقعات تابع کہتے ہیں، لیکن اگر ایک واقعہ دوسرے واقعہ پر اثر انداز نہ ہو تو ایسے واقعات کو ”غیر تابع“ کہتے ہیں۔
تابع واقعات کو بعض اوقات مشروط واقعات بھی کہتے ہیں۔

۴۵۶۔ اگر دو غیر تابع واقعات میں سے بالترتیب ہر ایک کا احتمال معلوم ہو تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کرو۔
 فرض کرو کہ پہلا واقعہ A طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے اور B طریقوں سے واقع نہیں ہو سکتا۔ نیز فرض کرو کہ دوسرا واقعہ A طریقوں سے واقع ہو سکتا ہے اور B طریقوں سے واقع نہیں ہو سکتا۔ اور ان سب طریقوں کا امکان مساوی ہے۔
 پہلی $(A+B)$ صورتوں میں سے ہر ایک کو دوسری $(A+B)$ صورتوں میں سے ہر ایک کے ساتھ شلک کیا جا سکتا ہے اس طرح ہمیں کل $(A+B)(A+B)$ مرکب صورتیں حاصل ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک کا امکان مساوی ہے۔
 ان صورتوں میں سے A میں دونوں واقعات وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ B صورتوں میں ان میں سے کوئی واقعہ وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ A میں پہلا واقعہ واقع ہوتا ہے اور دوسرا نہیں ہوتا، B صورتوں میں پہلا واقعہ واقع نہیں ہوتا اور دوسرا واقع ہوتا ہے۔ پس

دونوں واقعات کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال $\frac{A}{(A+B)(A+B)}$ ہے۔

دونوں واقعات میں سے کسی کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال $\frac{B}{(A+B)(A+B)}$ ہے۔

پہلے واقع ہونے اور دوسرے واقع ہونے کا احتمال $\frac{A}{(A+B)(A+B)}$ ہے۔

پہلے کے واقع نہ ہونے اور دوسرے واقع ہونے کا احتمال $\frac{B}{(A+B)(A+B)}$ ہے۔

پس اگر دو غیر تابع واقعات وقوع پذیر ہونے کے احتمال بالترتیب

ق اور ق ہوں تو دونوں کے واقع ہونے کا احتمال ق ق ہوگا۔ اسی قسم کا استدلال غیر تابع واقعات کی کسی تعداد پر عام ہوگا۔ اس طرح آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ اگر غیر تابع واقعات کی کسی تعداد کے جداگانہ وقوع پذیر ہونے کے احتمال بالترتیب ق، ق، ق، ہوں تو ان سب کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ق، ق، ق، ہوگا، پہلے دو کے وقوع پذیر ہونے اور باقی کے وقوع پذیر نہ ہونے کا احتمال ق، ق، (۱-ق) (۱-ق) (۱-ق) ہوگا، اسی طرح باقی کسی ایک خاص صورت کے لئے۔

۴۵۔ اگر ایک امتحان میں ایک واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ق ہو تو کسی متواتر امتحانوں میں اس کے واقع ہونے کا احتمال ق ہوگا۔ یہ نتیجہ دفعہ ماقبل میں

$$ق = ق، = ق، = ق، = \dots = ق$$

فرض کرنے سے فوراً واضح ہو جاتا ہے۔ معلوم کرنے کے لئے کہ واقعات کسی کسی تعداد میں سے کم از کم کسی ایک کے واقع ہونے کا کیا احتمال ہے ہم اس طرح غور کرتے ہیں۔ سب واقعات کے عدم وقوع کا احتمال (۱-ق)، (۱-ق)، (۱-ق) ہے، سوائے اس صورت کے باقی ہر صورت میں کوئی نہ کوئی واقعہ ضرور وقوع پذیر ہوگا۔ پس مطلوبہ احتمال

$$۱ - (۱-ق) (۱-ق) (۱-ق) \dots =$$

مثال ۱۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۵ سیاہ گیند ہیں، تھیلی میں سے تین گیند نکالے گئے ہیں، پھر ان گیندوں کو واپس رکھ کر دوبارہ تین گیند نکالے گئے ہیں پہلی مرتبہ تینوں گیندوں کے سفید نکلنے کا

اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا کیا احتمال ہے؟
جن مختلف طریقوں سے تین گیند نکالے جاسکتے ہیں ان کی کل
تعداد ۱۰۰ ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سفید گیند نکالے جاسکتے ہیں انکی
تعداد ۱۰۰ ہے۔

جن مختلف طریقوں سے تین سیاہ گیند نکالے جاسکتے ہیں
ان کی تعداد ۱۰۰ ہے۔

پس پہلے امتحان میں تین سفید گیند نکلنے کا احتمال

$$= \frac{100}{1000} = \frac{11 \times 12 \times 13}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$

اور دوسرے امتحان میں تین سیاہ گیند نکلنے کا احتمال

$$= \frac{100}{1000} = \frac{11 \times 12 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$

$$\text{لہذا مرکب واقعہ کا احتمال} = \frac{100}{1000} \times \frac{100}{1000} = \frac{10000}{1000000} = \frac{1}{100}$$

مثال ۲۔ اگر ایک سکہ کو اچھالا جائے تو بتاؤ کہ تین متوازن
اچھالوں میں تصویر اور زنجیر کے متبادلاً نکلنے کا کیا احتمال ہے؟
پہلے اچھال میں تصویر نکلیگی یا زنجیر۔ دوسرے اچھال میں
اس کے برعکس نکلنے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے اور تیسرے اچھال
میں پہلے اچھال کے موافق نکلنے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

پس مرکب واقعہ کا احتمال $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ہے۔

مثال ۳۔ ایک شخص ۱۰ کی عمر اس وقت ۳۵ سال کی
ہے، اس کے ۶۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکا
ن ۱:۹ ہے، ایک اور شخص ب کی عمر اس وقت ۴۵ سال

کی ہے، اس کے ۵ سال کی عمر تک زندہ رہنے کے خلاف امکان ۳:۲ ہے۔ بتاؤ کہ کم از کم ایک شخص کے ۳ سال تک زندہ رہنے کا کیا احتمال ہے۔

۳۰ سال کے اندر ۱ کے مر جانے کا احتمال $\frac{9}{14}$ ہے۔

۳۰ سال کے اندر ۲ کے مر جانے کا احتمال $\frac{5}{14}$ ہے۔

پس ۳۰ سال کے اندر ۱ کے مر جانے کا احتمال $\frac{9}{14}$ یعنی $\frac{27}{42}$ ہے۔
پس ۳۰ سال کے اندر ۲ کے مر جانے کا احتمال $\frac{5}{14}$ یعنی $\frac{15}{42}$ ہے۔

۳۰ سال کے اندر ۱ کے مر جانے کا احتمال $\frac{27}{42}$ یعنی $\frac{9}{14}$ ہے۔

۴۵۸۔ دفعہ ۴۵۶ کے حروف کے مفہوم میں ذرا سا تفسیر کرنے سے ہم دو تابع واقعات کے ایک ساتھ وقوع پذیر ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ جب پہلا واقعہ ہو چکنا ہے تو اس کے تحت دوسرا واقعہ ۱ طریقوں سے وقوع پذیر ہو سکتا ہے اور ۲ طریقوں سے وقوع پذیر نہیں ہو سکتا، تب جن طریقوں سے دونوں واقعات اکٹھے واقع ہو سکتے ہیں ان کی تعداد ۱ ہے، اس لئے ان کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال $\frac{1}{14}$ ہے۔

پس اگر پہلے واقعہ کا احتمال ح ہو اور اس کے تحت دوسرے واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال ج ہو تو دونوں واقعات کے ایک ساتھ واقع ہونے کا احتمال ج ح ہو گا۔

مثال ۱۔ تروپ کی بازی میں تماش کے پتے ایک ایک کر کے چار کھلاڑیوں میں تقسیم کئے گئے ہیں، بتاؤ کہ ایک خاص شخص کے پاس تروپ کا بادشاہ، اور ”بیگم“ دونوں کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

فرض کرو کہ یہ کھلاڑی ۱ ہے، تب ۱ کے پاس بادشاہ ہوتا
 احتمال $\frac{1}{52}$ ہے کیونکہ یہ 'پتہ' ۵۲ مختلف طریقوں سے تقسیم ہو سکتا
 ہے اور ان میں سے ۱۳ طریقے ۱ کے حصہ میں آئے ہیں، اب
 بادشاہ ۱ کے پاس آجانے کے بعد ۱ کے پاس 'بیگم' بھی آنے
 کا قرینہ $\frac{1}{51}$ ہے کیونکہ 'بیگم' کا پتہ باقی ۵۱ طریقوں سے تقسیم
 ہو سکتا ہے اور ۱۲ طریقے ۱ کے حصہ میں آتے ہیں۔

$$\text{پس مطلوبہ احتمال} = \frac{1}{52} \times \frac{1}{51} = \frac{1}{2652}$$

یا ہم اس طرح بھی استدلال کر سکتے ہیں۔
 ۵۲ مختلف طریقوں سے بادشاہ، اور بیگم، ۱ کے پاس
 آسکتے ہیں وہ ان ترتیبوں کی تعداد کے مساوی ہیں جو ۱۳
 چیزوں میں سے دو کو لینے سے حاصل ہوتی ہیں یعنی ان کی
 تعداد 13×12 ہے، اسی طرح بادشاہ اور بیگم کو تقسیم کرنے کے
 کل مختلف طریقے 52×51 ہیں۔

$$\text{اس لئے مطلوبہ احتمال} = \frac{1}{52 \times 51} = \frac{1}{2652} \text{ حسب سابق}$$

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۸ سیاہ گیندیں ہیں۔ پہلے
 تھیلی میں سے تین گیند نکالے گئے ہیں، پھر ان گیندوں کو واپس
 رکھنے کے بغیر اس میں سے تین اور گیند نکالے گئے ہیں۔ پہلی مرتبہ
 تینوں کے سفید اور دوسری مرتبہ تینوں کے سیاہ نکلنے کا احتمال
 معلوم کرو۔

پہلی آزمائش میں تین گیند کل ۵ ج ۳ طریقوں سے
 نکل سکتے ہیں اور تین سفید گیند ۵ ج ۳ طریقوں سے نکل سکتے
 ہیں پس پہلی آزمائش میں تینوں گیندوں کے سفید نکلنے کا
 احتمال $\frac{5}{143} = \frac{1 \times 12 \times 13}{3 \times 2 \times 1} \div \frac{3 \times 2 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{2}{13}$ ج ۳

جب تین گیند نکال لئے جائیں تو پچھلی میں باقی ۲ سفید اور ۸ سیاہ گیند رہ جاتے ہیں۔ پس دوسری آزمائش میں تین گیند کل ۱۰ مختلف طریقوں سے نکالے جاسکتے ہیں اور تین سیاہ گیند ۱۰ مختلف طریقوں سے نکالے جاسکتے ہیں۔ پس دوسری آزمائش میں تینوں گیندوں کے سیاہ

$$\text{نکلنے کا احتمال} = \frac{۱۰}{۸ \times ۷ \times ۶} = \frac{۱}{۱۲۰} \text{ اجم}$$

پس مرکب واقعہ کا احتمال $\frac{۱}{۱۲۰} \times \frac{۱}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۴۴۰۰}$ طالب علم کو چاہئے کہ اس جواب کا مقابلہ دفعہ ۲۵۷ کی مثال اول کے ساتھ کرے۔

۲۵۹۔ اگر ایک واقعہ دو یا زیادہ مختلف طریقوں سے واقع ہو سکتا ہو اور یہ طریقے ایک دوسرے کے متانی ہوں تو اس کے واقع ہونے کا احتمال مختلف طریقوں سے واقع ہونے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی ہوگا۔

اس مسئلہ کو بعض اوقات صحیح اور از خود بین نتیجہ خیال کرتے ہیں جو احتمال کی تعریف سے ہی واضح ہے، تاہم اسکو باضابطہ طور پر حسب ذیل طریقہ سے ثابت کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ واقعہ دو ایسے طریقوں سے جو ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے وقوع میں آسکتا ہے، نیز فرض کرو کہ ان دو طریقوں سے اس کے واقع ہونے کے احتمال بالترتیب

$$\frac{۱}{۲} \text{ اور } \frac{۱}{۳} \text{ ہیں۔ تب } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \text{ صورتوں}$$

میں سے $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$ صورتیں ایسی ہیں جن میں واقعہ پہلے طریقہ سے واقع ہو سکتا ہے اور $\frac{۱}{۳}$ صورتیں ایسی ہیں

جن میں واقعہ مذکورہ دو سب سے طریقہ سے واقع ہو سکتا ہے اور یہ طریقے ایک ساتھ واقع نہیں ہوتے۔ پس فی الجملہ $B + B$ صورتوں میں سے $B + B$ صورتیں ایسی ہیں جو واقعہ کے موافق ہیں، پس واقعہ کے ان دو طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے واقع ہونے کا احتمال

$$-\frac{1}{c} - \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

ایسے باہم متضامی طریقوں کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو سب پر اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا۔

اس لئے اگر واقعہ ان طریقوں سے واقع ہو سکتا ہو جو باہم
منافی ہوں اور اگر واقعہ کے ان مختلف طریقوں سے واقع

$$q + q + q + \dots + q + q$$

مثال ۱۔ دو مہرے ایک ساتھ پھینکے گئے ہیں۔ ان سے کم از کم ۹ نکلنے کا احتمال دریافت کرو۔

۹۔ پارہ طریقوں سے بن سکتا ہے، اس لئے ۹ نکلنے کا احتمال $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

۱۰۔ نمین طریقوں سے بن سکتا ہے اسلئے ۱۰۔ نکلنے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔

۱۱ دو طریقوں سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۱ نکلنے کا اقبال $\frac{2}{3}$ ہے۔

۱۲ ایک طریقہ سے بن سکتا ہے، اسلئے ۱۲ نکلنے کا احتمال $\frac{1}{12}$ ہے۔

اب ۹ سے کم عدد نہ نکالنے کا احتمال ان مختلف احتمالات سے حاصل جمع کے مساوی ہے

$$\frac{5}{18} = \frac{10}{36} = \frac{1+1+3+4}{36} = \text{مطلوبہ احتمال}$$

مثال ۲۔ ایک بٹوے میں ایک پونڈ ہے اور تین شلنگ، دوسرے بٹوے میں دو پونڈ ہیں اور چار شلنگ، تیسرے بٹوے میں تین پونڈ ہیں اور ایک شلنگ، اگر علی الحساب کوئی ایک بٹوہ نیکر اس میں سے ایک سکہ نکالا جائے تو بتاؤ کہ سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ہر ایک بٹوے کے لئے جانے کا امکان مساوی ہے اسلئے پہلا بٹوہ لینے کا احتمال $\frac{1}{3}$ ہے اور اس میں سے نکالے ہوئے ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال $\frac{1}{3}$ ہے، پس جہاں تک پہلے بٹوے کا تعلق ہے اس میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ہے اسی طرح سے دوسرے بٹوے میں سے پونڈ نکالنے کا احتمال $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ ہے اور تیسرے میں سے نکالے ہوئے سکہ کے پونڈ ہونے کا احتمال $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ یعنی $\frac{1}{3}$ ہے۔

$$\therefore \text{مطلوبہ احتمال} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$$

۴۶۰۔ دفعہ ماقبل میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض اوقات کسی واقعہ کے احتمال کو دو یا زیادہ مختلف واقعات کے احتمال کے حاصل جمع کے مساوی تصور کیا جاسکتا ہے لیکن یہ اچھی طرح ذہن نشین کر لینا چاہئے کہ کسی واقعہ کا احتمال دو یا زیادہ واقعات کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی اسی صورت میں سمجھا جاسکتا ہے جبکہ واقعات بلحاظ ایک دوسرے کے بالکل غیر متعلق ہوں یعنی جب کسی ایک واقعہ واقع ہونا باقی واقعات میں سے کسی ایک کے وقوع پذیر ہونے پر اثر انداز نہ ہو۔

مثال۔ ۲۰ ٹکٹوں پر پہلے بیس طبعی عدد لکھے ہوئے ہیں، ان میں سے ایک ٹکٹ علی الحساب نکالا گیا ہے، بتاؤ کہ اس پر کسے عدد کا ۳ یا ۵ کے ضعف ہونے کا کیا احتمال ہے۔

اس ٹکٹ پر کے عدد کے ۳ کے ضعیف ہونے کا احتمال $\frac{2}{3}$ ہے اور ۷ کے ضعیف ہونے کا احتمال $\frac{1}{3}$ یعنی $\frac{1}{3}$ ہے، اور یہ واقعات باہم منافی ہیں۔ پس مطلوبہ احتمال

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ ہے۔}$$

لیکن اگر سوال یوں ہوتا کہ اس عدد کے ۳ کے یا ۵ کے ضعیف ہونے کا کیا احتمال ہے تو حسب ذیل طریق پر استدلال کرنا غلط ہوتا۔

چونکہ عدد مذکور کے ۳ کے ضعیف ہونے کا احتمال $\frac{2}{3}$ ہے اور عدد مذکور کے ۵ کے کوئی ضعیف ہونے کا احتمال $\frac{1}{3}$ ہے، اسلئے

$$\text{مطلوبہ احتمال} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ ہے۔}$$

اس کی وجہ یہ ہے کہ ممکن ہے کہ عدد مذکور ۳ اور ۵ دونوں کا ضعیف ہو، اس لئے اس صورت میں دونوں واقعات ایک دوسرے سے غیر متعلق یا منافی نہیں ہیں۔

۴۶۱۔ یہ بات قابل غور ہے کہ مفرد اور مرکب واقعات کا فرق بہت سی صورتوں میں محض بےصوغی ہوتا ہے۔ بعض صورتوں میں یہ صرف نقطہ نظر کا فرق ہوتا ہے۔ مثال۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۷ سیاہ گیند ہیں، اگر دو گیند نکالے جائیں تو ایک گیند کے سیاہ اور دوسرے کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

(۱) اگر اس واقعہ کو مفرد تصور کیا جائے تو

$$\text{احتمال مطلوبہ} = (5 \times 4) \div 44 = \frac{20}{44}$$

(۲) اس واقعہ کو ذیل کے دو مرکب واقعات میں سے ایک یا دوسرے

کا وقوع تصور کیا جاسکتا ہے۔
۱۔ پہلے ایک سفید اور پھر ایک سیاہ گیند کا نکالنا، اس کا
احتمال

۲۔ پہلے سیاہ اور پھر سفید گیند کا نکالنا، اس کا احتمال

$$\frac{5}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{35}{110}$$

اور چونکہ یہ واقعات ایک دوسرے سے بالکل غیر متعلق ہیں، اسلئے
مطلوبہ احتمال

$$\frac{35}{110} = \frac{35}{110} + \frac{35}{110} = \frac{70}{110}$$

یہ بات قابل غور ہے کہ ہم نے یہاں تسلیم کر لیا ہے کہ دو مخصوص
گیندوں کو یکے بعد دیگرے نکالنے کا احتمال وہی ہے جو ان کو
ایک ساتھ نکالنے کا ہے، ذرا سے غور سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ
درست ہے۔

مثلاً نمبری ۳۲ (ب)

- ۱۔ ایک معمولی مہرہ کو یکے بعد دیگرے دو مرتبہ پھینکنے سے صرف
پہلی افتاد میں یکہ کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۲۔ ایک تاش میں سے تین پتے علی الحساب نکالے گئے ہیں،
بتاؤ کہ ان پتوں کے بادشاہ، بیگم اور غلام ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۳۔ ایک واقعہ کے خلاف امکان ۵ : ۲ ہے اور ایک اور واقعہ
جو پہلے واقعہ پر منحصر نہیں ہے اس کے موافق امکان ۵ : ۶ ہے۔
ان واقعات میں سے کم از کم ایک کے واقع ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۴۔ ایک لڑکے کے ایک سوال کو حل کر سکنے کے خلاف

امکان ۳:۴ ہے اور ایک لڑکے ب کے یہی سوال حل کر سکنے کے موافق امکان ۵:۷ ہے اگر یہ دونوں حل کرنے کی کوشش کریں تو سوال کے حل ہو جانے کا کیا احتمال ہے۔

۵۔ ایک بٹوے کے ایک خانہ میں ۲ پونڈ اور ۳ شلنگ ہیں اور دوسرے خانہ میں ۲ پونڈ اور ایک شلنگ، بٹوے میں سے ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۶۔ ایک تھیلی میں ۱ ٹکٹ ہیں جن پر ایک سے سترہ تک عدد لکھے ہوئے ہیں۔ ان میں سے ایک ٹکٹ نکالا گیا ہے اور پھر اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے، پھر ایک اور ٹکٹ نکالا گیا ہے اس کا کیا احتمال ہے کہ پہلا عدد جفت اور دوسرا طاق ہو۔

۷۔ ۴ آدمی ایک تائش میں سے ایک ایک پتہ نکالتے ہیں، بتاؤ کہ (۱) چاروں پتوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا (۲) کسی دو پتوں کی ایک ہی قیمت کے نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۸۔ ایک مہرہ کو ۵ دفعہ پھینکنے میں کچھ کم از کم ایک دفعہ ۶ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۹۔ ایک کتاب کا تین نکتہ سنج جدا جدا تبصرہ کر رہے ہیں، ان کے تبصروں کے کتاب کے حق میں یا موافق ہونے کے احتمال بالترتیب ۵:۲، ۴:۳، ۳:۴ ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ تین تبصروں میں سے کثرت کتاب کے حق میں ہو۔

۱۰۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سیاہ گیند ہیں، ان میں سے ۴ کو یکے بعد دیگرے اس طرح نکالا گیا ہے کہ نکالا ہوا گیند واپس نہیں رکھا گیا۔ بتاؤ کہ ان گیندوں کے متبادلاً مختلف رنگوں کے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ دو مہروں کو تین بار پھینکا گیا ہے، بتاؤ کہ کم از کم ایک بار دوسرے نکلنے کا کیا احتمال ہے [جب دو رنوں کے عددوں کی قیمتیں

مساوی ہوں تو ان عددوں کے زوج کو دُسر کہتے ہیں] ۱۲۔ اگر علی الحساب چار صحیح عددوں کو لیکر ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب کے آخری ہندسہ کے ۱، ۳، ۵ یا ۹ ہونیکا احتمال $\frac{16}{925}$ ہے۔

۱۳۔ ایک بٹوے میں ۱۰ سکے ہیں جن میں سے ایک سکہ پونڈ ہے اور باقی سب شلنگ ہیں، دوسرے بٹوے میں ۱۰ سکے ہیں اور سب کے سب شلنگ ہیں۔ پہلے بٹوے میں سے ۹ سکے لیکر دوسرے میں ڈال دیے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے ۹ سکے لیکر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، بتاؤ کہ پونڈ کے ابھی تک پہلے ہی بٹوے میں ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۴۔ ۲ سکوں کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ۵ تصویروں اور ۵ زنجیروں کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔ ۱۵۔ ۸ سکوں کو اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ ایک اور صرف ایک ہی سکہ میں تصویر کے اوپر ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۶۔ دو ب اور ج ترتیب وار پتوں کی ایک تاش کو کاٹتے ہیں اور پتوں کو پھر واپس رکھ دیتے ہیں۔ شرط یہ ہے کہ جو شخص پہلے تاش کے حکم کا پتہ کاٹے گا وہ انعام کا مستحق ہوگا، ان میں سے ہر ایک کے جداگانہ انعام پانے کا کیا احتمال ہے؟ ۱۷۔ ایک بٹوے میں ۳ پونڈ اور ۴ شلنگ ہیں، ۲ اور ب ترتیب وار اس میں سے جداگانہ ایک ایک سکہ نکالتے ہیں اور پھر واپس نہیں رکھتے، ان میں سے جداگانہ ہر ایک کا پہلے ایک پونڈ نکالنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۸۔ ن اشخاص کی ایک جماعت ایک گول مینر کے گرد بیٹھی ہے دو مخصوص آدمیوں کے ایک دوسرے کے پاس بیٹھنے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۱۹۔ چھ گھوڑے ایک دوڑ میں حصہ لیتے ہیں، ان میں سے ایک ۱ ہے۔ ۱ پر چابک سواروں ب اور ج میں سے کوئی ایک سوار ہوگا۔ ب کا ۱ پر سوار ہونے کے موافق امکان ۱:۲ ہے، اس صورت میں سب گھوڑوں کے جیتنے کا امکان مساوی ہے اگرچہ ۱ پر سوار ہو تو ۱ کے جیتنے کا احتمال تین گنا ہو جاتا ہے، ۱ کے جیتنے کے خلاف کیا امکان ہے؟

۲۰۔ اگر ۱۰ جہازوں میں سے بالادوسط ایک جہاز غرق ہو جاتا ہو تو ۵ جہازوں میں سے کم از کم ۴ کے صحیح سلامت پہنچنے کا کیا احتمال ہے۔

۲۱۔ اگر ایک واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال ایک امتحان میں معلوم ہو تو ن امتحانوں میں اس کے ٹھیک ایک دفعہ دو دفعہ، تین دفعہ، واقع ہونے کا احتمال جداگانہ دریا کر دو۔

فرض کرو کہ ایک امتحان میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال Q ہے۔ نیز فرض کرو کہ $1 - Q = P$ ، تب ن امتحانوں میں واقعہ مذکور کے عین ۱ مرتبہ وقوع پذیر ہونے کا احتمال $(P + Q)^n$ کے پھیلاؤ میں $(1 + P)$ دین رقم کے مساوی ہوگا۔

کیونکہ اگر ہم کل امتحانوں میں سے ۱ امتحانوں کا کوئی خاص جٹ منتخب کریں تو اس کا احتمال کہ واقعہ مذکور ان ۱ امتحانوں میں سے ہر ایک میں واقع ہو اور باقی امتحانوں میں سے کسی میں واقع نہ ہو P^n ہے۔ دیکھو دفعہ ۵۶ اور چونکہ ۱ امتحانوں کا کوئی جٹ ناج طریقوں سے منتخب کیا جاسکتا ہے اور ان میں سے ہر طریقہ میں واقعہ کے وقوع پذیر ہونے کا

احتمال $ق^۱ + ق^۲ + ق^۳$ ہے اس لئے مطلوبہ احتمال
فجر $ق^۱ + ق^۲ + ق^۳$

ہے۔ اگر ہم $(ق + ق^۲)$ کو مسئلہ ثنائی کی رو سے پھیلائیں
تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(ق + ق^۲) = ق^۱ + ق^۲ + ق^۳ + ق^۴ + ق^۵ + ق^۶ + ق^۷ + ق^۸ + ق^۹ + ق^{۱۰} + ق^{۱۱} + ق^{۱۲} + ق^{۱۳} + ق^{۱۴} + ق^{۱۵} + ق^{۱۶} + ق^{۱۷} + ق^{۱۸} + ق^{۱۹} + ق^{۲۰}$

گویا سلسلہ بالا کی رقیب ن امتحانوں میں واقعہ کے بالترتیب
ن بار $(ق - ق^۲)$ بار $(ق - ق^۲)$ بار واقع ہونے کے
احتمال کو تعبیر کرتی ہیں۔

۴۳۔ اگر ایک واقعہ پورے ن مرتبہ واقع ہو سکتا ہو یا
صرف ایک مرتبہ، دو مرتبہ $(ق - ق^۲)$ مرتبہ واقع نہ ہو سکتا
ہو تو ظاہر ہے کہ زیادہ مرتبہ واقع ہو سکتا ہے۔
اس لئے ن امتحانوں میں اس کے کم از کم ر مرتبہ واقع
ہونے کا احتمال

$ق^۱ + ق^۲ + ق^۳ + ق^۴ + ق^۵ + ق^۶ + ق^۷ + ق^۸ + ق^۹ + ق^{۱۰} + ق^{۱۱} + ق^{۱۲} + ق^{۱۳} + ق^{۱۴} + ق^{۱۵} + ق^{۱۶} + ق^{۱۷} + ق^{۱۸} + ق^{۱۹} + ق^{۲۰}$
یعنی $(ق + ق^۲)$ کی تفصیل میں پہلی ن - ۱ + ۱ رقموں کے حال
جمع سے تعبیر ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دو مہروں کو ایک ساتھ چار مرتبہ پھینکا گیا ہے۔ کم از کم دو
”دُسر“ کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

ایک دفعہ پھینکنے میں دُسر نکلنے کا احتمال $\frac{۲}{۳}$ یعنی $\frac{۱}{۳}$ ہے۔ اور
دُسر نہ نکلنے کا احتمال $\frac{۱}{۳}$ ہے۔ واقعہ زیر بحث کے پورا ہونے کے لئے

دو مرتبہ، تین مرتبہ، یا چار مرتبہ نکل سکتی ہیں کیونکہ مہروں کو چار مرتبہ پھینکا گیا ہے۔ پس مطلوبہ احتمال $(\frac{1}{4} + \frac{5}{4})$ کی تفصیل میں پہلی تین رقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔ یعنی

$$\frac{19}{100} = (\cancel{0 \times 4} + \cancel{0 \times 2} + 1) \frac{1}{r_4} =$$

مثال ۲- ایک تھیلی میں کچھ گیند ہیں جن میں سے کچھ گیند سفید ہیں، ایک گیند کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ پھر ایک اور کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ایک امتحان میں سفید گیند کے نکلنے کا احتمال Q ہو تو بتاؤ کہ n امتحانوں میں زیادہ سے زیادہ کتنے سفید گیندوں کے نکلنے کا احتمال ہے ؟

ٹھیک سفید گیند نکلنے کا احتمال "جرقہ" ہے، اب
 ہمیں صرف یہ معلوم کرنا ہے کہ ن کی کس قیمت کے یہ جملہ بڑے سے
 بڑا ہے۔

اب ج ق ف - ج ق ا ف - (۱-۲)

تا وقتیکہ (ن - ر + ا) ق < ر ف

یعنی (ن+ا) ق < (ق+ف) ر
 لیکن ق+ف = ا، پس ر کی مطلوبہ قیمت ق (ن+ا) میں کے
 بڑے سے بڑے عدد کے مساوی ہے۔

۴۶۴۔ فرض کرو کہ ایک قرعہ میں ن ٹکٹ ہیں اور انعام لایونڈ ہے، اب چونکہ انعام حاصل کرنے کے لئے سب ٹکٹوں کا امکان مساوی ہے اور ایک شخص جس کے پاس سب ٹکٹ

ہوں وہ ضرور جینگا اس لئے سمجھنا چاہئے کہ ہر ایک ٹکٹ کی مالیت $\frac{1}{n}$ پونڈ ہے، دوسرے لفظوں میں ایک ٹکٹ کے عوض میں یہ رقم معقولیت کے ساتھ ادا کیجا سکتی ہے۔ پس اگر ایک آدمی کے پاس n ٹکٹ ہوں اور وہ ان کو بیچنا چاہے تو ان کے عوض میں اسکا $\frac{1}{n}$ پونڈ طلب کرنا معقولیت سے بعید نہیں گویا اسکی کامیابی کے احتمال کی قیمت $\frac{1}{n}$ پونڈ متصور ہو سکتی ہے۔ اس بنا پر ذیل کی تعریف وضع کرنا موجب سہولت ہو گا۔

اگر ایک شخص کی کامیابی کا احتمال q ہو اور m وہ رقم ہو جو اس کو بصورت کامیابی حاصل ہو سکتی ہو تو mq سے جو رقم تعبیر ہوگی وہ اس شخص کی 'توقع' کہلاتی ہے۔ ۲۶۵۔ جس طرح سے بلحاظ کسی شخص کے لفظ "توقع" کا استعمال سہولت بخش ہے اسی طرح بلحاظ اشیاء کے الفاظ 'ظنی' قیمت کا استعمال موجب آسانی ہے۔

مثال ۱۔ ایک بٹوے میں ایک پونڈ اور ۵ ٹنگ ہیں۔ ایک اور بٹوے میں ۲ ٹنگ ہیں، پہلے بٹوے میں سے دو ٹنگ نکال کر دوسرے بٹوے میں ڈالے گئے ہیں، پھر دوسرے میں سے دو ٹنگ نکال کر پہلے میں ڈالے گئے ہیں، ہر ایک بٹوے کے سکوں کی 'ظنی' قیمت معلوم کرو۔

پونڈ کے پہلے بٹوے میں ہونے کا احتمال اسکے دو بارہ بدلے جانے اور ایک بار خفی نہ بدلے جانے کے احتمالوں کے حاصل جمع کے مساوی

$$\text{یعنی پہلے بٹوے میں ہونیکا احتمال} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

لہذا پونڈ کے دوسرے بٹوں میں ہونے کا احتمال $= \frac{1}{4}$
 پس پہلے بٹوں کی ظنی قیمت $\frac{3}{4} \times 15$ شلنگ + $\frac{1}{4} \times 6$ شلنگ
 $=$ پونڈ ۳ شلنگ ۳ پنس
 \therefore دوسرے بٹوں کی ظنی قیمت $= 31$ شلنگ - $\frac{1}{4} \times 20$ شلنگ
 $= 29$ شلنگ ۹ پنس

اس مسئلہ کو اس طرح بھی حل کیا جاسکتا ہے۔
 جن سکوں کو نکالا گیا ہے ان کی ظنی قیمت $= 25$ شلنگ کا $\frac{1}{4}$
 $= 6$ شلنگ ۲ پنس، جن کو پھر واپس لایا گیا ہے ان کی ظنی قیمت
 $= (6$ شلنگ + $\frac{1}{4}$ شلنگ) کا $\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ شلنگ
 \therefore پہلے بٹوں کی ظنی قیمت $= (25 - \frac{25}{4} + 6 \times \frac{1}{4})$ شلنگ
 $=$ پونڈ ۳ شلنگ ۳ پنس حسب سابق

مثال ۲۔ ۱ اور ب ۱۱ پونڈ کا ایک انعام جیتنے کے لئے اس
 شرط پر یکے بعد دیگرے ایک فہرہ پھینکنے میں کہ جو پہلے ۶ پھینکیں
 وہ انعام کا مستحق ہوگا۔ اگر ۱ پہلے پھینکے تو ان کوئی جداگانہ کیا
 ”توقعات“ ہیں۔

پہلی افتاد میں ۱ کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے اور دوسری افتاد میں
 $\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4}$ ہے، کیونکہ ۱ کو دوسری مرتبہ پھینکنے کا موقع
 صرف اسی صورت میں مل سکتا ہے جبکہ دونوں کھٹاڑی پہلی
 مرتبہ ناکام رہ چکیں تیسری مرتبہ پھینکنے میں ۱ کا احتمال
 $(\frac{5}{4})^2 \times \frac{1}{4}$ ہے، کیونکہ ۱ کو تیسرا موقع صرف اسی صورت میں
 مل سکتا ہے جبکہ ۱ اور ب دونوں دو دو مرتبہ ناکام رہ چکیں
 علیٰ ہذا القیاس
 پس ۱ کا احتمال لامتناہی سلسلہ

$$\left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \dots \right\}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اسی طرح سے ب کا احتمال لائنہا ہی سلسلہ

$$\left\{ \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \dots \right\}$$

کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۱۰۔ ا کے احتمال کی نسبت ب کے احتمال کے ساتھ ۵:۲ ہے، اس لئے جداگانہ اُن کے احتمال بالترتیب $\frac{2}{11}$ اور $\frac{5}{11}$ ہیں اور اُن کی توقعات ۲ پونڈ اور ۵ پونڈ ہیں۔

۴۶۶۔ اب ہم دو اور مثالیں حل کرتے ہیں جن سے نہایت مفید اور دلچسپ نتائج مستنبط ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک بازی جیتنے کے لئے دو کھلاڑیوں ۱ اور ۲ کو بالترتیب م اور ن کھیل جیتنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ ایک کھیل جیتنے کے لئے اُن کے احتمال بالترتیب ق اور ق' ہیں جہاں ق اور ق' کا مجموعہ ایک ہے انعام اس کو لیکر جو پہلے اپنے کھیلوں کی تعداد کو پورا کر لے گا۔ تاہم ہر ایک کھلاڑی نے جیتنے کا کیا احتمال ہے؟

فرض کرو کہ ۱ ٹھیک م + ۱ کھیلوں میں بازی جیت لیتا ہے ایسا ہونے کے لئے لازماً وہ آخری کھیل میں جیتا ہوگا اور اس سے پہلے کے م + ۱۔ ۱ کھیلوں میں سے م۔ ۱ کھیلوں میں جیتا ہوگا۔ اس کا احتمال

$$1 - 2^{-M-1} = 1 - 2^{-(M+1)}$$

یعنی $1 - 2^{-(M+1)}$ ہے۔

اب ضروری ہے کہ بازی کا فیصلہ $m + n$ - اکیلوں سے ہو اور ۱
اپنے m کھیل ٹیک m کھیلوں میں سے یا $m + ۱$ کھیلوں میں سے
یا $m + n$ - اکیلوں میں سے جیت سکتا ہے۔ اس لئے اگر ہم
جملہ $m + n$ نتائج $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ -
قیمتیں دیکر محصلہ جملوں کی قیمتیں معلوم کر لیں تو ہمیں ۱ کے جیتنے کا
احتمال معلوم ہو جائے گا۔
پس ۱ کے جیتنے کا احتمال

$$Q = \left\{ 1 + mQ + \frac{(m+1)^2}{2} Q^2 + \dots + \frac{m+n-1}{1-n} Q^{n-1} \right\}$$

اسی طرح ب کے جیتنے کا احتمال

$$Q^n = \left\{ n + nQ + \frac{n(n-1)}{2} Q^2 + \dots + \frac{m+n-1}{1-n} Q^{n-1} \right\}$$

اس مسئلہ کو "بازیوں کا مسئلہ" کہتے ہیں اور حکیم پاسکل کے زمانہ سے
لیکر بعد کے اکثر مشہور و معروف ریاضی دانوں کی توجہ اس مسئلہ
کی طرف مبذول رہی ہے۔ ^{۱۶۵۴ء} ۱۶۵۴ء میں پہلے پہل یہ سوال
شہر و لیورڈی میٹری کی جانب سے حکیم پاسکل سے پیش کیا گیا اور
پاسکل اور فرما نے اس پر بحث کی لیکن انہوں نے اپنی توجہ کو
دونوں کھلاڑیوں کے بلحاظ مہارت مادی ہونے کی صورت تک
محدود رکھا۔ ان دونوں کے نتائج اوپر کے نتائج سے ذرا مختلف شکل
میں تھے۔ جو نتائج ہم نے اوپر درج کئے ہیں وہ بانٹ مارٹ کے ساتھ
منسوب کئے جاتے ہیں جس نے پہلے پہل ان کو اپنی ایک کتاب میں
۱۶۱۴ء میں شائع کیا۔ یہی نتیجہ بعد ازاں لاگرتج اور لاپلاس نے

مختلف طریقوں سے حاصل کیا۔ مؤرخانہ کرنے اس مسئلہ کی بہت سی مختلف صورتوں پر تفصیل بحث کی ہے۔

مثال ۲۔ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے رُخ ہیں اور ہر مہرے کے رُخوں پر بالترتیب اسے ر تک عدد منقوش ہیں، اگر ان سب کو علی الحساب بھینکا جائے تو بتاؤ کہ جو عدد سب مہروں پر نکلیں ان کے مجموعہ کے ق کے مساوی ہونے کا کیا احتمال ہے۔

چونکہ ن مہروں میں سے ہر ایک مہرہ کے رخصوں میں سے کوئی رخ اوپر
اُسکتا ہے اس لئے مہروں کے گزرنے کے طریقوں کی تعداد ۲ ہے۔
نیز جن طریقوں سے ظاہر شدہ عددوں کا مجموعہ قی ہو سکتا ہے اُن
کی تعداد

$$(a^1 + a^2 + \dots + a^n)$$

کی تفصیل میں لاف کے سر کے مساوی سے اس کی وجہ یہ ہے کہ ہمیں قوت نماؤں ۱، ۲، ۳، میں سے ن ایسے قوت نماؤں کو لینا ہے جن کی مجموعہ ق ہو اور ایسا کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد ہر لاف کے سر کے مساوی ہے۔

اب حیلہ بالا = لا^(۱) + لا^(۲) + لا^(۳) + + لا^(۱۰۰)

$${}^{\circ}\left(\frac{y-1}{y+1}\right){}^{\circ}y=$$

اس لئے اب ہمیں مز (۱-۱) (۱-۱) کی تفصیل میں لا-ق-ن کا سر معلوم کرنا ہے۔

$$\dots + \frac{1}{3} \frac{n(n-1)(n-2)}{3} - \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} + n - 1 = \frac{1}{6} n(n-1)$$

- ۳: ۲ ہے۔ بتاؤ کہ ۵ بازیوں میں سے کم از کم ۳ جیتنے کے لئے کتنا کیا احتمال ہے۔
- ۲۔ ایک سکے کے رخوں پر بالترتیب ۲ اور ۳ لکھے چوٹے ہیں، سکے کو پانچ مرتبہ اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ جو عدد نکلیں ان کے مجموعہ کے ۱۲ ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۳۔ کئی کھیلوں کی بازی میں ہر ایک کھیل کے اندر گزشتہ کھیل کے جیتنے والے کے موافق اسکان ۱:۲ ہے، بتاؤ کہ اس کھلاڑی کے لئے جو پہلی بازی جیتتا ہے بعد کی چار بازیوں میں سے کم از کم تین جیتنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۴۔ ایک قبیلے میں ۹ سکے ہیں، ان میں سے ۵ یونٹ ہیں اور باقی مساوی مالیت کے نامعلوم سکے ہیں۔ اگر ایک دفعہ سکے نکالنے کی نفی قیمت ۱۲ شلنگ ہو تو بتاؤ کہ وہ سکے کیا ہیں۔
- ۵۔ ایک سکے کو ۱۰ بار اچھالا گیا ہے، بتاؤ کہ تصویر کے حق بار نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۶۔ ایک شخص ایک قبیلے میں سے جس میں ۲ یونٹ اور ۳ شلنگ ہیں پن دیکھے دو سکے نکالنے کا مجاز ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کی۔
- ۷۔ چھ اشخاص یکے بعد دیگرے ایک بیسہ اچھالتے ہیں، انعام اس کو ملے گا جس کے پھینکنے سے پہلے تصویر نکلے۔ چوتھے شخص کا احتمال معلوم کرو۔
- ۸۔ ایک قبیلے میں تین پتیاں ہیں جن پر بالترتیب اعداد ۱، ۲، ۳ لکھے ہیں، ان میں سے ایک کو نکال کر پھر واپس رکھ دیا گیا ہے، اسی عمل کو تین بار کیا گیا ہے مجموعہ کے ۶ ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۹۔ ایک سکے کے دو رخوں پر ہندسے ۳ اور ۵ لکھے گئے ہیں سکے کو چار مرتبہ اچھالا گیا ہے۔ اس طرح اچھالنے سے جو عدد برآمد ہوں ان کے حاصل جمع کے ۱۵ سے کم ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔
- ۱۰۔ تین چھروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے نمبر ۱۰ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ دو مساوی جہات کے کھڑی ر اور ب کھیلوں کی ایک بازی میں شریک ہوئے۔ جب ر کے جیتنے میں ۳ کھیلوں کی اور ب کے جیتنے میں دو کھیلوں کی کمی رہ جائے تو وہ کھیلنا چھوڑ دیتے ہیں اگر انعام ۱۶ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ او میں دونوں کا کیا حصہ ہے۔

۱۲۔ ر اور ب تین مہروں سے کھیلتے ہیں، ر کے مہرے پھینکنے سے ۸ برآمد ہوتا ہے بتاؤ کہ ب کا اس سے زیادہ پھینکنے کا کیا احتمال ہے؟
۱۳۔ ر کی جیب میں ایک پونڈ اور ۴ شٹنگ ہیں، وہ ان میں سے دو سکوں کو علی الحساب نکال کر ب اور ج کو دے دینا چاہتا ہے، ج کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک ہی مہرہ کو ۵ مرتبہ پھینکنے سے (۱) ٹھیک ۳ کے (۲) کم از کم تین کے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
۱۵۔ ر ب کے ساتھ ۵ شٹنگ : ۲ شٹنگ کی یہ شرط باندھتا ہے کہ دو مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے وہ ب کے ۴ پھینکنے سے پہلے، پھینک سکے گا دونوں کے پاس دو دو مہرے ہیں اور وہ دونوں ایک ساتھ پھینکتے ہیں حتیٰ کہ ان میں سے ایک جیت جاتا ہے اور ان افتادوں کو جن میں مساوی اعداد برآمد ہوتے ہیں نظر انداز کیا جاتا ہے۔ ب کی توقع معلوم کرو۔

۱۶۔ دو مہروں میں سے ایک مہرہ معمولی کمب ہے اور دوسرا منظم چار سطحی مجسم۔ ایک شخص ان مہروں کو پھینکتا ہے بتاؤ کہ جو عدد ان طرح برآمد کہوں ان کے حاصل جمع کے ۵ سے کم نہ ہونے کا کیا احتمال ہے۔ چار سطحی کی صورت میں سب سے نچلے برج پر کا عدد شمار میں آتا ہے۔

۱۷۔ ایک کھیلی میں ۸ مالیت کا ایک سکہ ہے اور چند اور سکے ہیں جنکی مجموعی قیمت ۴۴ ہے۔ ایک آدمی ایک ایک کر کے سکے نکالتا ہے حتیٰ کہ وہ مد نکال لیتا ہے، اس کی توقع کی قیمت دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک تھیلی میں ۶ ٹکٹ ہیں جن پر اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ لکھے ہوئے ہیں ان میں سے تین ٹکٹ نکالے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے مجموعہ کا ۶ ن کے مساوی ہونے کا احتمال یہ ہے

۳ ن

(۱-۶ ن) (۲-۶ ن)

مطلوب احتمال

۲۶۶۔ جن صورتوں پر اب تک ہم نے غور کیا ہے ان میں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ اسباب جو کسی واقعہ کا موجب ہوتے ہیں ان کے متعلق ہمارے معلومات اس قسم کے ہیں کہ ہم ان سے واقعہ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں اب ہم اس سے مختلف نوعیت کے مسائل پر بحث کریں گے۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ کوئی خاص واقعہ کئی اسباب میں سے کسی ایک سبب کی وجہ سے پیدا ہوا ہے تو ہم یہ معلوم کر چکے کہ ان سبب اسباب میں سے ہر ایک سبب کے واقعہ مذکور پر منتج ہونے کا کیا احتمال ہے۔ نیز انہی اسباب کے زیر عمل فرید واقعات کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال دریافت کر چکے۔

۲۶۷۔ عام ترین صورت پر بحث کرنے سے پہلے ہم ایک عددی مثال حل کر چکے۔

فرض کرو کہ ہمارے پاس دو بیوے ہیں۔ ایک میں ۵ پونڈ اور ۳ شینگ ہیں۔ دوسرے میں ۳ پونڈ اور ایک شینگ ہے۔ نیز فرض کرو کہ ایک پونڈ علی الحساب نکالا گیا ہے اس پونڈ کے پہلے بیوے میں سے اور دوسرے بیوے میں سے نکالے جانے کے باقی بچا کیا احتمال ہیں۔

انتہائوں کی ایک بہت بڑی تعداد ع پر غور کرو، چونکہ واقعہ واقع

ہونے سے پہلے ہر ایک بٹوے کے لئے جانے کا مساوی امکان ہے، ہم فرض کر سکتے ہیں کہ پہلے بٹوے کا انتخاب $\frac{1}{2}$ امتحانوں میں ہوگا اور ان کے $\frac{1}{2}$ میں پونڈ نکالا جائے گا یعنی پہلے بٹوے میں سے $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{4}$ مرتبہ پونڈ نکالا جائے گا۔

دوسرا بٹوا بھی $\frac{1}{2}$ امتحانوں میں منتخب کیا جاسکتا ہے اور اور ان کے $\frac{1}{2}$ میں پونڈ نکلیگا۔ یعنی دوسرے بٹوے میں سے $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ مرتبہ پونڈ نکلیگا۔

اب $\frac{1}{4}$ بہت بڑا ہے لیکن سوائے اس کے یہ بالکل اختیاری عدد ہے۔ یہ فرض کرو کہ $\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ ، پس ایک پونڈ پہلے بٹوے میں سے $\frac{1}{16}$ مرتبہ اور دوسرے میں سے $\frac{1}{16}$ مرتبہ نکالا جائے گا۔ یعنی اگر یہ کل $\frac{1}{16}$ مرتبہ نکالا جائے تو $\frac{1}{16}$ مرتبہ پہلے بٹوے میں سے اور $\frac{1}{16}$ مرتبہ دوسرے بٹوے میں سے نکلیگا۔ پس اس امر کا احتمال کہ پونڈ پہلے بٹوے سے نکالا گیا ہے $\frac{1}{16}$ ہے اور دوسرے بٹوے سے نکلنے جانے کا احتمال $\frac{1}{16}$ ہے۔

۴۶۹۔ یہ نہایت ضروری ہے کہ طالب علم دفعہ ماقبل کے مفروضہ کی ماہیت سے پورا واقف ہو جائے۔ ہم ایک خاص مثال لیکر اس کی مزید توضیح کرتے ہیں۔ اگر ایک متشاکل اور منتظم کعب مہرہ کو ۶۰ مرتبہ پھینکا جائے تو یہ ممکن ہے کہ یکے ٹھیک ۱۰ بار پھینکے لیکن باہر ہم اس میں شبہ نہیں کہ اگر ہم انداختوں کی تعداد کو متواتر بڑھاتے جائیں تو ان انداختوں کی تعداد جن میں یکہ برآمد ہوتا ہے اور کل انداختوں کی تعداد کی باہمی نسبت بتدریج $\frac{1}{10}$ کے قریب قریب آتی جائے گی کیونکہ یہ فرض کرنے کی کوئی وجہ نہیں ہے کہ کوئی خاص رخ باقی رہے۔

ق ق ع میں واقعہ مذکور واقع ہوگا۔ اسی طرح سے ق ق ع
امتحانوں میں واقعہ مذکور دوسرے سبب کی وجہ سے واقع ہوگا اور
اسی طرح سے باقی ہر ایک سبب کے لئے۔ پس ان امتحانوں کی
تعداد جن میں واقعہ واقع ہوگا۔

$$(ق ق + ق ق + + ق ق) ع یا ع ح (ق ق)$$

ہے۔ نیز ان امتحانوں کی تعداد جن میں واقعہ مذکور ر ویں سبب
کی وجہ سے واقع ہوتا ہے ق ق ع ہے، پس واقعہ کے وقوع
پذیر ہو جانے کے بعد ر ویں سبب کے اصلی سبب یعنی واقعہ
مذکور کا موجب ہونے کا احتمال

$$ق ق ع \div ع ح (ق ق)$$

ہے، پس ر ویں سبب سے واقعہ مذکور کے وقوع کا احتمال

$$\frac{ق ق ع}{ع ح (ق ق)}$$

ہے۔

۴۷۔ یہ نہایت ضروری ہے کہ کسی واقعہ کے وقوع سے قبل متعدد
اسباب کی موجودگی کے احتمال اور وقوع کے بعد کسی سبب کے
اصلی سبب ہونے کے احتمال میں بخوبی تیز کیا جائے۔ اول الذکر
کو بالعموم احتمال مقدم سے موسوم کرتے ہیں اور ق ق
ق ق ق ق سے تعبیر کرتے ہیں، موخر الذکر کو احتمال
موخر کہتے ہیں۔ اگر ان کو ف، ف، ف، ف، ف سے
تعبیر کیا جائے تو ہم ابھی ثابت کر چکے ہیں کہ

$$ف = \frac{ق ق ع}{ع ح (ق ق)}$$

اس سے ظاہر ہے کہ موجودہ طرز کے سوالوں میں سب سے پہلے
 حاصل ضرب $ق ق$ کی درست قیمت نکال لینی چاہئے۔ بہت
 سی صورتوں میں $ق ق$ ، $ق ق$ ، $ق ق$ ، ... سب مساوی
 ہوتے ہیں جس سے عمل بہت مختصر ہو جاتا ہے۔
 مثال - تین تھیلیوں میں سے ہر ایک میں ۵ سفید گیند ہیں اور
 ۲ سیاہ گیند اور دو اور تھیلیاں ہیں جن میں سے ہر ایک میں ۱
 سفید گیند ہے اور ۴ سیاہ۔ اگر ایک سیاہ گیند نکلے تو اس گیند کے
 تھیلیوں کے اول جٹ میں سے نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
 ۵ تھیلیوں میں سے تین تھیلیاں پہلے جٹ کی ہیں اور دو دوسرے
 کی۔ اس لئے

$$ق = \frac{3}{5} \text{ اور } ق = \frac{2}{5}$$

اگر پہلے جٹ میں سے ایک تھیلی لی جائے تو اس میں سے سیاہ گیند
 کے نکلنے کا احتمال $\frac{2}{5}$ ہے، اگر دوسرے جٹ میں سے ایک تھیلی لی جائے
 تو اس میں سے سیاہ گیند نکلنے کا احتمال $\frac{4}{5}$ ہے

$$\text{پس } ق = \frac{2}{5} \text{ اور } ق = \frac{4}{5}$$

$$ق ق = \frac{6}{25} \text{ اور } ق ق = \frac{8}{25}$$

پس گیند مذکور کے پہلے جٹ میں نکلنے کا احتمال

$$\frac{6}{25} \div \left(\frac{6}{25} + \frac{8}{25} \right) = \frac{15}{14} \text{ ہے۔}$$

۴۷۳۔ جب کوئی خاص واقعہ مشاہدہ کے تحت میں آجائے تو
 ہم نے دیکھا کہ دفعہ ۴۷۲ کی مدد سے کسی خاص سبب کے اس
 واقعہ پر منتج ہونے کا احتمال دریافت ہو سکتا ہے۔ اس کے بعد

ہم دوسرے امتحان میں واقعہ مذکور کے واقع ہونے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں یا کسی اور واقعہ کے وقوع کا احتمال محسوب کر سکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ $ر$ دیں سبب کی موجودگی میں واقعہ مذکور کے وقوع کا احتمال $ق$ ہے اور $ر$ دیں سبب کے اصلی سبب ہونیکا احتمال $ق$ ہے، پس دوسرے امتحان میں $ر$ دیں سبب کی بنا پر واقعہ مذکور کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال $ق$ ہے لہذا اسباب زیر بحث میں سے کسی ایک سبب سے واقعہ مذکور کے وقوع پذیر ہونے کا احتمال $ق$ ہے۔

مثال - ایک بٹوں میں ۴ سکے ہیں جو یا پوڑ ہیں یا شلنگ، ۲ سکوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے یہ دونوں شلنگ ہیں۔ ان کو واپس رکھ دیا گیا ہے۔ ایک اور امتحان سے پوڑ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔ اس سوال کے دو مفہوم ہو سکتے ہیں، ان دونوں پر ہم جداگانہ بحث کریں گے۔

۱۔ اگر ہم یہ خیال کریں کہ شلنگوں کی کسی تعداد کے لئے جانے کا مساوی امکان ہے تو ذیل کے تین مفروضے حاصل ہوتے ہیں۔
(۱) ممکن ہے کہ تمام سکے شلنگ ہوں، (۲) تین سکے شلنگ ہوں (۳) دو سکے شلنگ ہوں۔

یہاں $ق_1 = ق_2 = ق_3$

نیز $ق_1 = 1$ ، $ق_2 = \frac{1}{2}$ ، $ق_3 = \frac{1}{4}$

پس پہلے مفروضہ کا احتمال $= 1 \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{4}{7} = ق_1$

دوسرے مفروضہ کا احتمال $= \frac{1}{2} \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{2}{7} = ق_2$

تیسرے مفروضہ کا احتمال $= \frac{1}{4} \div (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{7} = ق_3$

پس ایک اور امتحان سے پونڈ نکلنے کا احتمال = $(\text{ف} \times 0) + (\text{ف} \times \frac{1}{10}) + (\text{ف} \times \frac{2}{10})$

$$\frac{1}{8} = \frac{5}{40} = \frac{1}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} =$$

۲۔ اگر ہر ایک سکے کے پونڈ یا شنگ ہونے کا مساوی امکان ہے تو $(\frac{1}{10} + \frac{1}{10})$ کے پھیلاؤ کی رقوم سے ہم دیکھتے ہیں کہ چار شنگوں کا احتمال $\frac{1}{16}$ ہے، تین شنگوں کا $\frac{3}{16}$ یعنی $\frac{1}{4}$ ہے، دو شنگوں کا احتمال $\frac{6}{16}$ یعنی $\frac{3}{8}$ ہے۔

$$\text{پس } \text{ق} = \frac{1}{16}, \text{ ق} = \frac{3}{16}, \text{ ق} = \frac{6}{16}$$

$$\text{نیز } \text{ق} = 1 - \text{ق} - \text{ق} = \frac{1}{16}, \text{ ق} = \frac{1}{16}$$

$$\text{لہذا } \frac{\text{ف}}{4} = \frac{\text{ف}}{12} = \frac{\text{ف}}{6} = \frac{\text{ف} + \text{ف} + \text{ف}}{24} = \frac{1}{24}$$

پس ایک اور امتحان میں پونڈ نکلنے کا احتمال

$$= (\text{ف} \times 0) + (\text{ف} \times \frac{1}{10}) + (\text{ف} \times \frac{2}{10}) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

اب ہم یہ بتائینگے کہ اگر ہمیں چند گواہوں کے متعلق یہ معلوم ہو کہ وہ کس درجہ قابل اعتماد ہیں تو ہم احتمال کے نظریہ کی مدد سے کس طرح ان کی شہادتوں کی صداقت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ ہم یہاں تسلیم کرینگے کہ ہر ایک گواہ جو شہادت دیتا ہے اسکو اپنے ذہن میں بالکل برحق اور سچی سمجھتا ہے خواہ اس کا بیان تجربہ، مشاہدہ یا استدلال پر مبنی ہو۔ پس ہر ایک غلطی یا دروغ گوئی گواہ کی دانست کی غلطی پر محمول کرنا چاہئے نہ کہ بالارادہ غیب کاری پر۔

جس قسم کے مسائل پر اب ہم بحث کریں گے وہ علمی اور عقلی مہارت کے لئے نہایت مفید اور سود مند ہیں۔ اگرچہ ان نتائج سے کوئی خاص فائدہ حاصل نہیں ہوتا تاہم یہ سب عام عقل و فہم کے عین مطابق ہیں۔

۴۷۵۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ کسی شخص کے سچ بولنے کا احتمال ق ہے تو اس سے ہماری مراد یہ ہوتی ہے کہ اگر اس شخص کی شہادتوں کی ایک کثیر تعداد کا معائنہ کیا جائے تو ان شہادتوں کی نسبت جو سچی ثابت ہوں شہادتوں کی کل تعداد کے ساتھ ق ہے۔

۴۷۶۔ دو گواہ جن کو ایک دوسرے سے کچھ تعلق نہیں ہے اور جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب ق اور ق ہیں ایک ہی شہادت پیش کرتے ہیں۔ بتاؤ کہ شہادت کے سچے ہونے کا کیا احتمال ہے۔

یہاں مشاہدہ شدہ واقعہ یہ ہے کہ ۱ اور ۲ دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں۔ واقعہ سے قبل ۴ مفروضے ہیں، کیونکہ ممکن ہے کہ (۱) ۱ اور ۲ دونوں سچ بولیں، (۲) ۱ سچ بولے اور ۲ جھوٹ بولے (۳) ۱ جھوٹ بولے اور ۲ سچ بولے (۴) ۱ اور ۲ دونوں جھوٹ بولیں۔ ان چاروں مفروضوں کے احتمال بالترتیب

ق ق ، ق (۱-ق) ، ق (۱-ق) ، (۱-ق) (۱-ق)

ہیں۔ پس مشاہدہ شدہ واقعہ کے بعد جس میں ۱ اور ۲ دونوں ایک ہی شہادت دیتے ہیں شہادت کے سچا ہونے کے احتمال کو شہادت کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت ق ق : (۱-ق) (۱-ق) ہے۔ یعنی شہادت کے سچا ہونے کا

ق ق

ہے۔

احتمال

ق ق + (ا-ق) (ق-ا) (ق-ق) اسی طرح سے اگر ایک تیسرا شخص وہی شہادت دے اور اسکے سچ بولنے کا احتمال ق ہو تو شہادت کے سچا ہونے کا احتمال ق ق ق

ق ق ق + (ا-ق) (ق-ا) (ق-ق)

ہے اور علیٰ ہذا القیاس گواہوں کی کسی تعداد کے لئے ۴۷۷ - دفعہ ماقبل میں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ ہمیں ۱ اور ب کے بیانات کے علاوہ واقعہ کے متعلق کوئی علم نہیں ہے اگر ہمارے پاس ان بیانات کے علاوہ واقعہ مذکورہ کی صداقت یا دروغ کے احتمال کو معلوم کرنے کے اور ذرائع بھی موجود ہوں تو مختلف مفروضات کے احتمال معلوم کرنے کے لئے ان ذرائع کو بھی ملحوظ رکھنا چاہئے۔ مثلاً اگر ۱ اور ب ایک بیان میں متفق ہوں جسکا احتمال مقدم ق ہو تو اس بیان کی صداقت اور دروغ کے احتمال بالترتیب ق ق ق اور (ا-ق) (ق-ا) (ق-ق) ہوں گے۔

مثال - ۱۲ ٹکٹوں کی ایک لٹری میں دو انعام ہیں : ایک ۹ پونڈ کا اور دوسرا ۳ پونڈ کا۔ ۱، ب اور ج جن کے سچ بولنے کے احتمال

بالترتیب $\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ اور $\frac{3}{8}$ ہیں د کو جس کے پاس ایک

ٹکٹ ہے نتیجہ سے اس طرح معلوم کرتے ہیں : ۱ اور ب کہتے ہیں کہ اس نے ۹ پونڈ کا انعام جیتا ہے اور ج کہتا ہے کہ اس نے ۳ پونڈ والا انعام جیتا ہے، د کی توقع محسوب کرو۔

تین صورتیں ممکن ہیں، (۱) د نے ۹ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۲) ۳ پونڈ والا انعام جیتا ہو (۳) ۱، ب اور ج تینوں نے جھوٹ

بولا ہو اور د نے کوئی انعام نہ جیتا ہو۔
اب دفعہ ۴۷ کے طریق کتابت کے موافق احتمال مقدم

$$Q = \frac{1}{12}, Q' = \frac{1}{12}, Q'' = \frac{1}{12}$$

$$\text{میں، نیز } Q = \frac{1}{12} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{90}, Q' = \frac{1}{12} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{90}, Q'' = \frac{1}{12} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{90}$$

$$Q''' = \frac{1}{12} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{90}$$

$$\therefore \frac{Q}{Q'} = \frac{Q''}{Q'''} = \frac{Q'''}{Q''} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{لہذا د کی توقع} = 9 \text{ پونڈ کا } \frac{2}{90} + 3 \text{ پونڈ کا } \frac{2}{90}$$

$$= \frac{2}{90} (9 + 3) = \frac{2}{90} \times 12 = \frac{2}{15}$$

۴۷۔ یہ بات قابل غور ہے کہ جو شلنگ ہم نے دفعہ ۴۷ میں ثابت کئے ہیں ان میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جاسکتا ہے یعنی اگر سب گواہ متفق طور پر جھوٹ بولیں تو وہ سب ایک ہی جھوٹا بیان دینگے۔
اگر یہ صورت نہ ہو تو فرض کر دو کہ (۱) اور (ب) دونوں سے ایک ہی جھوٹا بیان دینے کا احتمال ج ہے، تب بیان کے سچا ہونے کے احتمال کو اس کے جھوٹا ہونے کے احتمال کے ساتھ نسبت

$$Q : Q' : Q'' : Q''' = (1-Q) : (1-Q') : (1-Q'') : (1-Q''')$$

عام طور پر یہ ایک نہایت غیر اغلب امر ہے کہ دو غیر متعلق گواہ متفقہ طور پر ایک ہی جھوٹ بولیں۔ لہذا ج بالعموم بہت چھوٹا ہوتا ہے اور نیز جوں جوں گواہوں کی تعداد بڑھتی جائے ج بتدریج اور بھی کم ہوتا جاتا ہے۔ ان امور کا لحاظ رکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر

دو یا زیادہ غیر متعلق گواہ ایک ہی بیان پر متفق ہوں تو خواہ ان گواہوں کا اعتماد بہت کم ہو تو بھی بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال بڑھ جاتا ہے۔

مثال - اگر ۴ بیانوں میں سے ۳ بیان سچے ہوتے ہیں اور ب کے ۱۰ میں سے ۷۔ یہ دونوں اس بات پر متفق ہیں کہ ایک تھیلی میں جس میں مختلف رنگوں کے گیند ہیں ایک سفید گیند نکالا گیا ہے۔ اس بیان کے سچا ہونے کا احتمال دریافت کرو۔
اس میں صرف دو مفروضے ہو سکتے ہیں، (۱) یہ متفقہ شہادت سچ ہے یا (۲) جھوٹ۔

$$\text{یہاں } Q = \frac{1}{4}, \text{ } Q = \frac{5}{4}$$

$$Q = \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} = Q, \text{ } Q = \frac{4}{10} \times \frac{3}{10}$$

کیونکہ Q کی قیمت معلوم کرنے میں ہمیں اس کے احتمال کو ملحوظ رکھنا چاہئے کہ اگر اور ب سفید رنگ کے گیند کو منتخب کریں، تو سفید گیند تھیلی سے نہ نکالا گیا ہو۔ یہ احتمال

اب ان دو مفروضوں کے احتمالوں کی نسبت $Q = \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{100}$: $Q = \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{25} = \frac{3}{1000}$ ہے۔
پس بیان مذکور کے سچا ہونے کا احتمال $\frac{3}{1000}$ ہے۔

۴۷۹۔ جن صورتوں پر ہم نے بحث کی ہے وہ سب کی سب ہمیں شہادت کی سچائی کے احتمال کے متعلق تھیں، مستوی شہادت کی ایک مثال ذیل میں درج کی جاتی ہے۔

ا کہتا ہے کہ ایک واقعہ واقع ہوا اور اس واقعہ کے وقوع یا عدم وقوع کی اطلاع اس نے ب سے پائی ہے، تباؤ کہ واقعہ کے وقوع کا

کیا احتمال ہے۔

واقعہ مذکور واقع ہوا ہے (۱) اگر ان دونوں نے سچ بولا ہے (۲) یا اگر ان دونوں نے جھوٹ بولا ہے اور واقعہ نہیں ہوا اگر ان میں سے ایک نے سچ بولا ہے اور دوسرے نے جھوٹ۔

فرض کر دو کہ ا اور ب کے سچ بولنے کے احتمال ق اور ق ہیں تب واقعہ کے واقع ہونے کا احتمال

$$ق ق + (۱ - ق) (۱ - ق)$$

ہے اور واقعہ کے واقع نہ ہونے کا احتمال

$$ق (۱ - ق) + (۱ - ق) (۱ - ق)$$

ہے۔

۴۸۔ وقتہ ماقبل کے مسئلہ کا جو حل عام کتابوں میں دیا جاتا ہے وہی یہاں درج کیا گیا ہے درحقیقت ایسا کرنا اعتراض سے خالی نہیں کیونکہ یہ کہنا کہ اگر ا اور ب دونوں نے سچ نہیں بولا تو واقعہ مذکور واقع ہوا ہے صرف اسی صورت میں درست ہو سکتا ہے جبکہ بیان صرف دو طریقوں سے دیا جاسکے تیرہ امر بھی کہ ا نے ب سے اطلاع پائی ہے پورے طور پر درست تصور نہیں کیا جاسکتا کیونکہ اس کی صداقت کا دار و مدار بھی ا کے بیان پر ہی ہے۔

اس سوال کو جو مختلف معنی دئے جاسکتے ہیں اور ان معنوں کے متناظر مسئلہ مذکور کے مختلف حلوں پر ایجوکیشنل ٹائمز رپورٹ جلد ۲۴، ۳۲ پر بسیط اور مدلل بحث کی گئی ہے۔

امثلہ نمبری ۳۲ (۵)

۱۔ ایک تھیل میں ۴ گیندیں ہیں لیکن یہ معلوم نہیں کہ وہ کس رنگ کے ہیں۔ ایک گیند کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے۔ سب گیندوں کے سفید ہونے کا کیا احتمال ہے۔

- ۲۔ ایک تھیلی میں نامعلوم رنگوں کے چھ گیند ہیں، تین گیندوں کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ ان تینوں کا رنگ سیاہ ہے۔ تھیلی میں اور کسی سیاہ گیند کے باقی نہ رہنے کا کیا احتمال ہے۔
- ۳۔ ایک کتاب میں ایک لفظ کا کچھ حصہ چھپائی میں حذف ہو گیا ہے، آخر کے دو حروف 'ن'، 'ر' سے جاسکتے ہیں، یہ معلوم ہے کہ یا یہ لفظ "مورتوں" ہے یا "مصاحبوں" بناؤ کہ اس لفظ کے "مورتوں" ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۴۔ ایک کھیل کے شروع ہونے سے قبل تین کھلاڑیوں ایک بج کی کامیابیوں کے احتمال بالترتیب ۵، ۳، ۲ کے متناسب ہیں۔ لیکن اٹھائے کھیل میں کسی حادثہ کی وجہ سے ۱ کا احتمال پہلے احتمال کا ۱/۴ رہ جاتا ہے۔ اب ب اور ج کے الگ الگ کیا احتمال ہیں۔
- ۵۔ ایک بٹوے میں نامعلوم قیمت کے ن سکتے ہیں، ایک سکہ نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ پونڈ ہے۔ تھیلی میں صرف اسی ایک سکہ کے پونڈ ہونے کا کیا احتمال ہے؟
- ۶۔ ایک آدمی کے پاس ۱۰ شٹنگ ہیں اور ان میں سے ایک یہ دونوں طرف مورتیں ہیں۔ وہ آٹھ علی الحساب ایک شٹنگ لیکر اسکو ۵ دفعہ اچھالتا ہے اور پانچوں دفعہ مورت نکلتی ہے، بناؤ کہ اس شٹنگ کے دو مورتوں والے شٹنگ ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۷۔ ایک تھیلی میں نامعلوم رنگوں کے ۵ گیند ہیں۔ دو مرتبہ ایک گیند نکالا گیا ہے اور واپس رکھ دیا گیا ہے اور دونوں مرتبہ یہ گیند سرخ نکلا ہے۔ اب اگر ایک ہی مرتبہ دو گیند نکالے جائیں تو ان دونوں گیندوں کے سرخ ہونے کا کیا احتمال ہے۔
- ۸۔ ایک بٹوے میں ۵ سکتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک ۱/۵ شٹنگ یا شٹنگ ہے۔ دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں شٹنگ ہیں۔ باقی سکوں کی ظنی قیمت معلوم کرو۔

۹۔ ایک مہرے کو تین بار پھینکا گیا ہے اور جو تین عدد نکلے ہیں ان کا حاصل جمع ۱۵ ہے۔ پہلی اندازت میں جو عدد نکلا تھا اس کے ۴ ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۰۔ ۱ کے چار بیانوں میں سے تین بیان سچے ہوتے ہیں اور ب کے چھ میں سے پانچ ایک ہی بیان کے اظہار ہیں دونوں کے ایک دوسرے کی تردید کرنے کا کیا احتمال ہے؟

۱۱۔ ۱ کی تین باتوں میں سے ۲ باتیں سچی نکلتی ہیں اور ب کی پانچ میں سے چار وہ دونوں اس بیان میں شفق ہیں کہ ایک پھیلی میں سے جس میں مختلف رنگوں کے چھ گیند ہیں ایک سرخ گیند نکلا گیا ہے اس بیان کے سچے ہونے کا احتمال محسوب کرو۔

۱۲۔ ۵۲ پتوں کی ایک تاش میں سے ایک پتہ گم ہو گیا ہے، باقی تاش میں سے دو پتے نکالتے گئے ہیں اور یہ دونوں حکم کے پتے ہیں، گم شدہ پتے کے حکم کا پتا ہونے کا کیا احتمال ہے۔

۱۳۔ ایک گاڑی میں ۱ ٹکٹ ہیں اور ۵ پونڈ اور ۱ پونڈ کے دو انعام ہیں۔ ب، ۱ کو جس کے پاس ایک ٹکٹ ہے اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ۵ پونڈ کا انعام جیتا ہے، ج، ۱ کو اطلاع دیتا ہے کہ اس نے ایک پونڈ کا انعام جیتا ہے، اگر ب کا اعتماد $\frac{1}{2}$ ہو اور ج کا $\frac{1}{3}$ تو اس کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک بٹومے میں ۴ سٹے ہیں اور ان میں سے دو کو نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں پونڈ ہیں، بتاؤ کہ (۱) سب سکوں کے پونڈ ہونے کا اور (۲) اگر سٹے واپس رکھ دئے جائیں تو پھر نکالنے پر پونڈ نکلنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۵۔ ف، ق کے ساتھ ۸ پونڈ، ۱۲ پونڈ کی شرط لگاتا ہے کہ تین گھڑ دوڑوں میں تین گھوڑے (۱) ب اور ج جیتنے جن کے خلاف شرطیں بالترتیب ۳:۲، ۴:۱، ۱:۲ ہیں۔ پہلی گھڑ دوڑ میں

۱ جیتا ہے، اور یہ بھی معلوم ہے کہ دوسری گھڑ دوڑ میں یا ب جیتا ہے یا کوئی اور گھوڑا د کے خلاف توقع ۱:۲ ہے، فحشی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۱۶۔ ایک تقییلی میں ن گیند ہیں جو یا سیاہ ہیں یا سفید، ہر قسم کے گیندوں کے سب حدود کا امکان مساوی ہے۔ ایک گیند نکال کر دیکھا گیا ہے کہ وہ سفید ہے، اس کو واپس رکھ دیا گیا ہے۔ پھر ایک گیند نکالا گیا ہے یہ بھی سفید ہے، اگر اس کو بھی واپس رکھ دیا جائے تو ثابت کرو کہ اب جو گیند نکلیگا اس کے سیاہ ہونیکا

احتمال $\frac{1}{2} (1 - n) (1 + n)$ ہے۔

۱۷۔ م ن کے م بٹوں میں تقسیم کئے گئے ہیں یعنی ہر بٹے میں ن کے ڈالے گئے ہیں۔ (۱) دو مخصوص سکوں کے ایک ہی بٹے میں ہونے کا کیا احتمال ہے (۲) اگر یہ بٹوں کو دیکھا گیا ہو اور ان میں سے کسی میں سے بھی ان مخصوص سکوں میں سے کوئی سک نہ برآمد نہ ہو تو یہ احتمال کیا ہو جائیگا۔

۱۸۔ اور ب دو ظلیہ غن ریاضی میں کمزور ہیں اور ان کے ایک سوال کو حل کرنے کے احتمال جہاں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہیں، دونوں کا جواب ایک ہی ہے۔ اگر ان کے ایک ہی غلطی کے خطرے ہونے کے خلاف امکان ۱:۱... ۱ ہو تو جواب کے درست ہونے کا کیا احتمال ہے؟

۱۹۔ ۱۰ گواہ ایسے ہیں کہ ہر ایک کے چار بیانیوں میں سے ایک جھوٹا ہوتا ہے، وہ سب اس بات پر متفق ہیں کہ ایک واقعہ ہوا۔ ثابت کرو کہ اس بیان کے موافق امکان ۱:۵ ہے جبکہ احتمال سقم ایک چھوٹی

مقدار $\frac{1}{1+5}$ کے مساوی ہے۔

مقامی احتمال - ہندسی طریقے

۴۸۱۔ احتمال کے مسائل کے حل کرنے کے لئے تعلیم ہندسہ سے مدد لینے میں بالعموم احصائے تکملات سے کام لینا پڑتا ہے۔ تاہم بعض آسان سوالات ایسے بھی ہیں جو محض ابتدائی ہندسہ کی مدد سے حل ہو سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ دو مستقیم خطوں میں سے ہر ایک کا طول لی ہے، ان دونوں میں سے علی الحساب کچھ حصہ کاٹ کر الگ کر دیا گیا ہے، باقی طولوں کے حاصل جمع کے لی سے کم ہونے کا کیا احتمال ہے۔
دونوں خطوں کو ایک دوسرے کے متوازی رکھو اور فرض کرو کہ قطع کرنے کے بعد دائیں جانب کے حصے خارج کر دیے گئے ہیں۔ تب اوپر کا سوال ذیل کے سوال کے ہم معنی ہے: دائیں جانب کے حصوں کے حاصل جمع کا بائیں طرف کے حصوں کے حاصل جمع سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے۔ ظاہر ہے کہ پہلے حاصل جمع کے دو حصے حاصل جمع سے بڑے یا چھوٹے ہونے کے امکان مساوی ہیں۔ پس سطلوہ احتمال $\frac{1}{2}$ ہے نتیجہ صریح۔ اگر یہ معلوم ہو کہ دونوں خطوں میں سے کسی ایک کا طول لی سے بڑا نہیں ہے تو ان کے حاصل جمع کے لی سے بڑا نہ ہونے کا احتمال $\frac{1}{2}$ ہے۔

مثال ۲۔ اگر تین خط علی الحساب طولوں کے لئے جائیں تو بتاؤ کہ ان کے ایک مثلث بن سکنے کا امکان مثلث نہ بن سکنے کے امکان کے مساوی ہے ان تین خطوں میں سے ایک نہ ایک خط لازماً باقی دو خطوں کے مساوی ہو گا یا ان دونوں سے بڑا ہو گا۔ فرض کرو اس خط کا طول لی ہے، تب باقی دو خطوں کی بابت ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ ان میں سے ہر ایک کا طول۔ اور لی کے درمیان واقع ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے (دیکھو نتیجہ صریح مثال ۱) کہ اگر دو

خطوں کے طول۔ اور لی کے درمیان ہوں تو ان کے چل جمع کے ل سے بڑے ہونے کا احتمال لی سے بڑے نہ ہونے کے احتمال کے مساوی ہوتا ہے جس سے جواب مطلوبہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ ایک دائرہ

کے تین مماس علی الحساب کھینچے گئے ہیں، ثابت

کرو کہ دائرہ مذکور کے ان

مماسوں کا اندرونی دائرہ

ہونے کے خلاف امکان

۱:۳ ہے۔

دائرہ کی سطح مستوی

میں تین خط 'ق' 'ر'

علی الحساب کھینچو اور ان خطوں کے متوازی دائرہ کے ۶ مماس کھینچو۔

ظاہر ہے کہ اس طرح سے جو ۸ مثلث بنتے ہیں ان میں سے چھ کے لئے

دائرہ مذکورہ جانبی دائرہ ہے اور اسی لئے اندرونی دائرہ اور یہ ہر حالت میں

درست ہے خواہ 'ق' 'ر' کی سمتیں یکجہ ہی ہوں۔ پس مطلوبہ

نتیجہ صاف ظاہر ہے۔

۴۸۲۔ احتمال کے سوالات بعض اوقات ہندسہ تحلیل کی

مدد سے نہایت آسان ہو جاتے ہیں۔

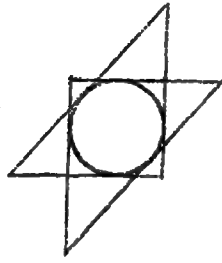
مثال۔ ایک سلاح پر سے جس کا طول 'ا' + 'ب' + 'ج' ہے دو طول

'ا' اور 'ب' علی الحساب ناپ لئے گئے ہیں۔ اس امر کا احتمال

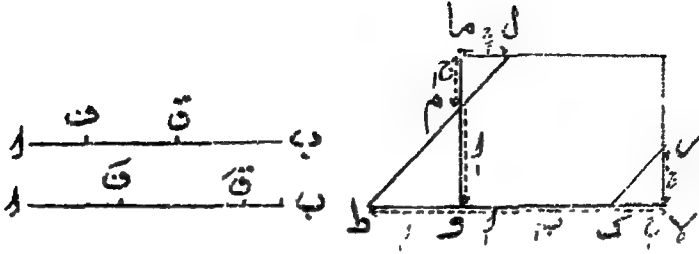
معلوم کرو کہ ایک طول کا کوئی نقطہ دوسرے طول کے کسی نقطہ

پر منطبق نہ ہو۔

فرض کرو کہ خط مذکور 'ا' 'ب' ہے،



ق
ر



نیز فرض کرو کہ $ل = ب$ ، $ق = ل$ اور $ل = ب$ سے
 $ب$ کی سمت میں ناپا گیا ہے۔ پس $لا = ب + ج$ کم سے ہوگا،
 نیز فرض کرو کہ $ل = ب$ ، $ق = ل$ اور $ق = ب$ سے
 $ب$ کی سمت میں ناپا گیا ہے، تب $ما$ کم سے ہوگا $ل + ج$ سے۔
 اب متعلق صورتوں میں $ل < ق$ یا $ق < ل$ یا
 $ل = ق$ یا $ق = ل$ یا $لا < ب + ج$ یا $ب + ج < لا$ (۱)

لیکن سب ممکن صورتوں میں $لا < ب + ج$ اور $ب + ج < لا$ (۲)

دو علی القوائم محاورہ، $لا$ کو $ب + ج$ کے مساوی بناؤ اور $ما$ کو $ل + ج$ کے مساوی بناؤ۔

نقطہ $ما = ل + ج$ اور $لا = ب + ج$ ملاحظہ کرو اور ان کو بالترتیب
 $ط$ م ل اور ک ر سے تعبیر کرو۔

تب $ما$ اور $ک$ لا دونوں $ج$ کے مساوی ہیں اور $و$ م،
 $ط$ و دونوں $ل$ کے مساوی ہیں۔

شرائط (۱) صرف مثلثات $م$ $ما$ $ل$ اور $ک$ $لا$ کے نقطوں سے

پوری ہوتی ہیں، اور شرط (۲) مستطیل و لا x و ما کے اندر کے نقطوں سے پوری ہوتی ہیں۔

$$\frac{ج^۲}{(۱+ج)(ب+ج)} = \text{مطلوبہ احتمال}$$

۳۴۸۔ اب ہم چند متضد مثالیں درج کر کے اس باب کو ختم کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک صندوق میں مساوی خانوں میں تقسیم کیا گیا ہے، اور ان میں ن گیندیں علی الحساب ڈالے گئے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ ف خانوں میں سے ہر ایک میں ۱ گیند ہوں، ق خانوں میں سے ہر ایک میں ب گیند، ر خانوں میں سے ہر ایک میں ج گیند ہوں اور علی ہذا القیاس، جہاں

ف + ق + ب + ر + ج + = ن
چونکہ ن گیندوں میں سے کوئی گیند ہم خانوں میں سے کسی خانے میں پڑ سکتا ہے اس لئے کل صورتوں کی تعداد جو واقع ہو سکتی ہیں م ہے اور ان سب کا امکان مساوی ہے۔ موانع صورتوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہمیں یہ دیکھنا چاہئے کہ کتنے طریقوں سے ن گیند ف، ق، ر، ج، ایسے جٹوں میں تقسیم ہو سکتے ہیں جن میں بالترتیب ۱، ب، ج، گیند ہوں۔ پہلے کوئی س خانے منتخب کرو جہاں س، ف + ق + ر + کو تقسیم کرتا ہے، ان مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے

$$\frac{س}{س-۱} \dots \dots (۱) -$$

پھر ان س خانوں کو ایسے جٹوں میں تقسیم کرو کہ ان میں خانوں

کی تعداد بالترتیب 'ق'، 'ر'، ہو، دفعہ ۴، ۳ کی رستہ جن مختلف طریقوں سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے ان کی تعداد

اس
[ق] [ر] ہے (۲)

آخر کار ن گیندوں کو ان خانوں میں اس طرح تقسیم کرو کہ جن خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں ۱ گیند ہوں، 'ق' خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں ۲ گیند ہوں، 'ر' خانوں والے جُٹ کے ہر ایک خانے میں ۳ گیند ہوں، 'ج'، وغیرہ وغیرہ، ان مختلف طریقوں کی تعداد جن سے یہ عمل کیا جاسکتا ہے

ان
(۱) (۲) (۳) (۴) (۵) ہے (۳)

پس ان طریقوں کی تعداد جن سے حسب شرائط مذکورہ بالا یہ گیند ترتیب دے سکتے ہیں جملات (۱)، (۲) اور (۳) کے حاصل ضرب سے تعبیر ہوتی ہے۔ لہذا مطلوبہ احتمال یہ ہے :-

۴

۴ (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰)

مثال ۲۔ ایک تھیلی میں ن گیند ہیں۔ یکے بعد دیگرے کئی مرتبہ ایک ایک گیند نکالا گیا ہے اور ہر دفعہ سفید گیند برآمد ہوتا ہے، اگر (۱) گیند نکال کر ہر دفعہ واپس رکھے جائیں (۲) اگر واپس نہ رکھے جائیں تو بتاؤ کہ پھر ایک گیند نکلنے پر سفید گیند نکلنے کا کیا احتمال ہے۔
(۱) مشاہدہ کردہ واقعہ سے قبل مساوی امکان کے (ن + ۱) مفروضات ہیں کیونکہ تھیلی میں ۱، ۲، ۳،، ن سفید گیند ہو سکتے ہیں

(۲) اگر گیند واپس نہ رکھے جائیں تو

$$\text{قر} = \frac{ر}{ن} \times \frac{۱-ر}{۱-ن} \times \frac{۲-ر}{۲-ن} \dots \frac{ر-ک}{ن-ک} + ۱$$

$$\text{اور فرض} = \frac{\text{قر}}{\text{قر} + \text{قر} + \dots} = \frac{(ر-ک)(۱+ک) \dots (۲+ک)(۱+ک) \dots (۱-ر)}{(ن-ک)(۱+ک) \dots (۲+ک)(۱+ک) \dots (۱-ن)} \dots$$

(دفعہ ۹۴)

اگلے گیند کے سفید ہونے کا احتمال = $\frac{ر-ک}{ن-ک} \times \frac{ر-۱}{ن-۱} \dots$

$$= \frac{۱+ک}{(ن-ک)(۱+ک) \dots (۱+ک)(۱+ک) \dots} \times \frac{ر-۱}{ن-۱} \dots (ر-ک)(۱+ک) \dots$$

$$= \frac{۱+ک}{(ن-ک)(۱+ک) \dots (۱+ک)(۱+ک) \dots} \times \frac{ر-۱}{ن-۱} \dots (ر-ک)(۱+ک) \dots$$

مثالی کے ابتدائی گیندوں کی تعداد کے تابع نہیں۔
مثال ۳۴۸ - ایک شخص نے ۱۰ خط لکھے اور ان کے تیوں کے
ن اٹھائے۔ اگر وہ خطوط مذکورہ کو ان لفافوں میں غلطی سے
توڑ کر، خط کے غلط لفافہ میں ڈالے جائے گا کیا احتمال ہے۔
توڑ کر کہ ۶ طریقوں کی تعداد کو تعبیر کرتا ہے جن میں سب
خط غلط لفافوں میں پڑ سکتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ جب سب خط

اپنے اپنے نفاذ میں ہوں تو ان کی ترتیب ا ب ج د سے تعبیر ہوتی ہے۔ اب اگر کسی اور ترتیب میں کسی مخصوص حرف ب کی جگہ لے لے تو ب یا ا کی جگہ لینگا یا کسی دوسرے حرف کی جگہ۔
 (۱) فرض کرو کہ ب، ا کی جگہ لے لیتا ہے، تب ان طریقوں کی تعداد جن سے باقی سب ن - ۲ خط اپنی جگہ سے ہٹ سکتے ہیں ع - ۲ ہے، اس لئے جن مختلف طریقوں سے ا باقی ن - ۱ خط کی میں سے کسی ایک کے ساتھ تبادلہ کرنے سے ہٹ سکتا ہے جبکہ باقی سب حروف بھی ساتھ ہی اپنی جگہ سے ہٹے ہوئے ہوں ان کی تعداد (ن - ۱) ع - ۲ ہے۔
 (۲) فرض کرو کہ ا، ب کی جگہ لے لیتا ہے اور ب، ا کی جگہ نہیں لیتا۔ تب چونکہ ا، ب کی جگہ پر قائم ہے اس لئے ان ترتیبوں میں جو مطلوبہ شرائط کو پورا کرتی ہیں خطوط ب، ج، د سب کے سب جگہ بدلیں گے۔ یہ عمل ع - ۱ طریقوں سے ہو سکتا ہے پس ان طریقوں کی تعداد جن میں ا کسی دوسرے خط کی جگہ لیتا ہے لیکن وہ خط ا کی جگہ نہیں لیتا (ن - ۱) ع - ۱ ہے۔

$$\therefore \text{ع} = (ن - ۱) (\text{ع} - ۱ + \text{ع} - ۲)$$

اس سے دفعہ ۳۴۴ کی مدد سے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ع} - ن \text{ع} - ۱ = (۱ - ۲) (\text{ع} - ۲ - \text{ع} - ۱)$$

نیز $\text{ع} = ۱$ ، اس لئے بالاخر ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

$$\text{ع} = \left[\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots + \frac{۱}{(ن-۱)} - \frac{۱}{ن} \right]$$

اب ان کل طریقوں کی تعداد جن میں ن چیزیں ن جگہوں پر رکھی جاسکتی ہیں [ن] ہے، اس لئے مطلوبہ احتمال

۲۔ ایک بٹوں میں ۵ پونڈ ہیں اور ۴ شنگ۔ ان کے متبادل پونڈ اور شنگ نکلنے کا کیا احتمال ہے جبکہ ان کو یکے بعد دیگرے نکالا جائے اور پہلے پونڈ نکلے۔

۳۔ اگر ۱۰ جہازوں میں سے ۹ جہاز بالا وسط بندرگاہ تک صحیح سلامت پہنچ جاتے ہوں تو بتاؤ کہ پانچ جہازوں میں سے کم از کم تین جہازوں کے صحیح سلامت پہنچ جانے کا کیا احتمال ہے۔

۴۔ ایک قرعہ میں سوئے ایک ٹکٹ کے باقی سب ٹکٹ خالی ہیں، اگر ایک آدمی ایک ٹکٹ نکالتا ہے اور اپنے پاس رکھ لیتا ہے، ثابت کرو کہ ہر ایک آدمی کے انعام جیتنے کا احتمال مساوی ہے۔

۵۔ ایک تھیلی میں ۵ سفید اور ۳ سرخ گیند ہیں اور ایک اور تھیلی میں ۴ سفید اور ۵ سرخ گیند ہیں۔ کسی ایک تھیلی میں سے علی الحساب دو گیند نکالے گئے ہیں۔ ان گیندوں کے مختلف رنگوں کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۶۔ پانچ اشخاص 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع' ترتیب وار ایک مہرہ پھینکتے ہیں حتیٰ کہ ان میں سے کوئی ایک یکہ پھینک سکے۔ یہ فرض کر کے کہ وہ مہرہ کو پھینکتے رہیں گے تا وقتیکہ یکہ نکل آئے ان کے اضافی احتمال معلوم کرو۔

۷۔ شطرنج کے ایک تختہ پر کے تین خانے علی الحساب منتخب کئے گئے ہیں ان میں سے دو خانوں کے ایک رنگ کے اور ایک کے دوسرے رنگ کے ہونے کا احتمال دریافت کرو۔

۸۔ ایک شخص دو مہرے پھینکتا ہے۔ ایک مہرہ معمولی مکعب ہے اور دوسرا منظم ذواربعتہ السطوح، ذواربعتہ السطوح کی صورت میں منجملے رخ کا عدد لایا جاتا ہے، ایک انداخت کی اوسط قیمت معلوم کرو اور ۵، ۶، ۷ پھینکنے کے احتمال محسوب کرو۔

۹۔ ۱ کی مہارت کی نسبت ب کی مہارت کے ساتھ ۱: ۳ ہے

اور ج کی جہارت کے ساتھ ۳ : ۲ اور ۵ کے ساتھ ۴ : ۳۔ بتاؤ کہ اگر
۱، باقی تینوں اشخاص ب، ج، د میں سے ہر ایک کے مقابلہ میں
مہر پھینکے تو اس کے کم از کم دو مرتبہ جیتنے کا کیا احتمال ہے۔
۱۰۔ بار آدمی بالترتیب ایک بہشت سطحی مہرہ کو اس شرط پر
پھینکتے ہیں کہ انعام اس کو ملے جو اول مرتبہ یا پھینکے بتاؤ کہ آخری
آدمی کے جیتنے کا کیا احتمال ہے۔

۱۱۔ مساوی جہارت کے دو کھلاڑی ۱ اور ۲ کھیلوں کی ایک
بازی کھیلتے ہیں ۱ کو بازی جیتنے کے لئے دو کھیلوں کی ضرورت ہے
اور ۲ کو تین کی۔ ان کے جیتنے کے احتمال کا مقابلہ کرو۔
۱۲۔ ایک بیٹے میں تین پونڈ ہیں اور ۲ شلنگ۔ ایک شخص
دونوں ہاتھوں سے ایک ایک سکہ نکالتا ہے۔ پھر ایک سکہ کو
دیکھتا ہے کہ وہ پونڈ ہے یا بتاؤ کہ دوسرے ہاتھ میں کسے کے سکہ کے پونڈ
اور شلنگ ہونے کا مساوی امکان ہے۔

۱۳۔ ۱ اور ۲ ایک انعام کو جیتنے کے لئے ایک مہرہ پھینکتے
ہیں، پہلے ۱ اس شرط پر پھینکتا ہے کہ اگر وہ ۶ پھینک سکے تو
وہ جیت جائیگا۔ اگر ۱ ناکام رہے تو پھر ۲ پھینکا اور اگر ۲ یا
۵ پھینک سکے تو وہ جیت جائیگا۔ اگر وہ بھی ناکام رہے تو پھر ۱
پھینکے اور اگر ۱، ۶، ۵ یا ۴ پھینک سکے تو ۱ جیت جائے۔ علیٰ بن ابی نقیص
ہر ایک کھلاڑی کے جیتنے کا احتمال دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک ریل گاڑی کے درجہ اول کے خانہ کی چہ نشستوں کو حاصل
کرنے کے لئے سات آدمی قرعہ ڈالتے ہیں، ان میں سے (۱) دو مخصوص
اشخاص کے مقابل کی نشستوں کے حاصل کرنے کے اور (۲) ایک ہی
جانب کی دو متصل نشستوں کے حاصل کرنے کے احتمال محسوب کرو۔

۱۵۔ ایک عدد میں ۷ ہندسے ہیں جن کا حاصل جمع ۵۹ ہے ثابت کرو کہ
اس عدد کے ۱۱ پر تقسیم ہوسکنے کا احتمال $\frac{1}{11}$ ہے۔

- ۱۶۔ تین مہروں کو ایک ساتھ پھینکنے سے ۲۰ نکلنے کا نیا احتمال ہے۔
- ۱۷۔ ایک نیلی میں ٹکٹ ہیں اور ان پر بالترتیب اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ لکھے ہیں، ایک ٹکٹ کو نکال کر واپس رکھ دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس طرح چار ٹکٹ نکالنے سے جو عدد درجہ ہوں ان کے حاصل جمع کے ۸ ہونے کا کیا احتمال ہے؟
- ۱۸۔ ۱۰ ٹکٹوں میں ۵ ٹکٹ خالی ہیں اور باقی پانچ پر اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ لکھے ہیں۔ تین بابا ایک ایک ٹکٹ نکال کر ۱۰ بنائینے کا کیا احتمال ہے۔ جبکہ (۱) ہر دفعہ ٹکٹ واپس رکھ دئے جائیں (۲) ٹکٹ واپس نہ رکھے جائیں۔
- ۱۹۔ اگر ن صحیح عددوں کو علی الحساب لیکر ضرب دیا جائے تو ثوابت کرو کہ حاصل ضرب کے

آخری عدد کے ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ ہونے کا احتمال $\frac{2}{5}$ ہے، ۲، ۴، ۶، ۸ ہونے کا احتمال $\frac{3}{5}$ ہے، ۵ ہونے کا احتمال $\frac{5}{10}$ ہے اور ۰ ہونے کا احتمال $\frac{10-5-3-2}{10}$ ہے۔

- ۲۰۔ ایک بٹوے میں ۲ پونڈ اور ۲ شلنگ ہیں اور ایک اور سکہ اسی شکل و قامت کا کسی دوسری دھات کا ہے ایک آدمی ایک وقت ایک سکہ نکالتا ہے تا وقتیکہ وہ کھوٹا سکہ نہ نکال لے اس کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔
- ۲۱۔ تین اشخاص ا، ب اور ج اسی ترتیب سے تین مہرے ایک ساتھ اس شرط پر پھینکتے ہیں کہ جو شخص پہلے ۱۰ پھینک لے اس کو ایک خاص رقم انعام دی جائے گی۔ اگر وہ اسی ترتیب سے پھینکتے جائیں جب تک کہ شہ طر نہ گور پوری نہ ہو جائے تو ثوابت کرو کہ ان کے احتمال بالترتیب

$$\left(\frac{8}{13}\right)^2، \frac{54}{13}، \left(\frac{4}{13}\right)^2 \text{ ہیں۔}$$

۲۲۔ دو اشخاص جن کے سچ بولنے کے احتمال بالترتیب $\frac{2}{5}$ اور $\frac{3}{4}$ ہیں متفقہ طور پر یہ بیان کرتے ہیں کہ ایک تھیلی میں سے جس میں ۵ انگڑیاں ہیں ایک مخصوص نمٹ نکالا گیا ہے اس بیان کی صداقت کا احتمال معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک تھیلی میں $\frac{n}{m}$ (ن/م) ٹہرے ہیں، ان میں سے ایک ٹہرہ پورا دور ۱۱ اور تین پر ۹ لکھا ہے اور علیٰ بذیقتیاں ایک آدمی تھیلی میں سے ایک ٹہرہ اس شہ طیر نکالتا ہے کہ جو عدد اس ٹہرے پر ہو اس کو اسے ہی نشاننگ دے جائیں۔ اس آدمی کی توقع کی قیمت معلوم کرو۔

۲۴۔ اگر ۱۰ چیزیں تین شخصوں میں تقسیم کی جائیں تو ثابت کرو کہ ایک خاص آدمی کے ۵ سے زیادہ چیزیں لینے کا احتمال $\frac{15}{144}$ ہے۔

۲۵۔ ایک سلاخ پر علی الحساب ۸ نشان لگا کر سلاخ کو ان نشانوں سے حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ ان حصوں میں سے ہر ایک حصہ کے سلاخ کے $\frac{1}{8}$ دیں حصے سے بڑے نہ ہونے کا احتمال $\frac{1}{8}$ ہے۔

۲۶۔ دو بٹوں میں سے ایک میں تین پونڈ اور ایک نشاننگ ہے اور دوسرے میں ۳ نشاننگ اور ایک پونڈ۔ ایک غیر معین بٹوں میں سے ایک سکھ نکال کر دوسرے میں ڈال دیا گیا ہے۔ پھر دونوں بٹوں میں سے ایک ایک سکھ نکال کر دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں نشاننگ ہیں۔ اگرچہ دونوں بٹوں میں سے ایک ایک سکھ اور نکالا جائے تو ان دونوں سکھوں کے نشاننگ ہونے کے خلاف کیا امکان ہے۔

۲۷۔ ایک دائرہ کے محیط پر علی الحساب تین نقطے لیکر ان کو ملاسنے سے ایک مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے سب زاویوں کے حادہ

ہونے کے خلاف امکان ۱:۳ سے -

۲۸ - ایک دائرہ کے محیط پر تین نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں، بتاؤ کہ اس طرح سے جو تین قوسیں حاصل ہوں ان میں سے کسی دو قوسوں کے ملکر دوسری قوس سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے -

۲۹ - ایک خط کو علی الحساب تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان حصوں سے ایک مثلث بن سکے گا کیا احتمال ہے -

۳۰ - ایک بٹوے میں ۲۵ پونڈ ہیں اور دوسرے بٹوے میں ۱۰ پونڈ اور ۱۵ شلنگ ایک بٹوے کو علی الحساب منتخب کر کے اس میں سے ۴ سکے نکالے گئے ہیں اور سب کے سب پونڈ ہیں - اس بٹوے کے صرف پونڈوں والا بٹوہ ہونے کا کیا احتمال ہے اور اگر اس بٹوے میں سے ایک اور سکہ نکالا جائے تو اس کی قطعی قیمت کیا ہے -

۳۱ - ایک خط مستقیم کا طول ۱۱ ہے اس پر دو نقطے علی الحساب لئے گئے ہیں ان نقطوں کے درمیانی فاصلہ کے ب سے بڑے ہونے کا کیا احتمال ہے -

۳۲ - ایک خط مستقیم کا طول ۱۱ ہے اس پر علی الحساب دو نقطے لیکر اس کو تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے - اس کا احتمال معلوم کرو کہ کوئی حصہ ب سے بڑا نہ ہو -

۳۳ - ایک خط مستقیم کا طول ۱ + ب ہے اس پر دو طول ۱ اور ب علی الحساب ناپے گئے ہیں - ثابت کرو کہ ان طولوں کے مشترک حصہ کے

ج سے زیادہ نہ ہونے کا احتمال $\frac{ج}{۱+ب}$ ہے جہاں ج کم ہے ۱ یا ب سے -

نیز بتاؤ کہ چھوٹے طول ب کے بڑے طول ۱ کے قلی طور پر اندر آنے کا

احتمال $\frac{۱-ب}{۱}$ ہے -

۳۴ - ایک خط مستقیم کا طول ۱ + ب + ج ہے اس پر علی الحساب دو طول ۱ اور ب ناپے گئے ہیں - ان کے مشترک حصے کے د سے

زیادہ نہ ہونے کا احتمال $\frac{(ج+د)^2}{(ج+د)(ج+ب)}$ ہے جہاں د یا ب سے کم ہے۔

۳۵۔ ایک یورپین ریلوے میں درجہ اول کے کل خانے ہیں درجہ دوم کے ۵۰ اور درجہ سوم کے ۱۰۰ اس گاڑی میں دو مرد د اور سب اور دو عورتیں ج اور د سفر کر رہے ہیں جو سب ایک دوسرے سے نادانقت ہیں۔ د اور سب کے سوار ہونے سے قبل درجہ اول، درجہ دوم اور درجہ سوم میں سفر کرنے کے احتمال بالترتیب ل، م، ن، د، ہ ہیں اور ج اور د کے یہی احتمال بالترتیب ل، م اور ن ہیں، ثابت کرو کہ ل، م، ن، د، ہ کی تمام قیمتوں کے واسطے (سوائے اس خاص صورت کے جب کہ ل، م، ن، د = ل، م، ن) د اور سب کے ایک ہی عورت کی رفاقت میں ہونے کا احتمال الگ الگ عورتوں کی رفاقت میں ہونے کے احتمال سے مقابلہ زیادہ ہے۔



تینتیسواں باب

مقطعات

۲۸۵۔ باب ہدایں ہم مقطعات اور اُن کے ابتدائی خواص پر اجمالی بحث کریں گے۔ اس مختصر بیان سے طالب علم ہندسہ تحلیلی اور نیز علم ریاضی کے دیگر علم شعبوں میں مقطعات کی ترقیم سے مستفید ہونے کے متبادل ہو جائے گا۔ شعبہ تحلیلی کی اس شاخ کے متعلق زیادہ مفصل اور سو وضع معلومات ڈاکٹر سالمن کی کتاب اعلیٰ جبر و مقابلہ جدید کے ابتدائی اجسامی (Lessons Introductory to modern Higher algebra)

سے اور نیز موئر کے نظریہ مقطعات (Theory of Determinants)

سے حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

۲۸۶۔ دو متجانس خطی مساواتوں

$$a_1x + b_1y = m_1$$

$$a_2x + b_2y = m_2$$

پر غور کرو۔ پہلی مساوات کو b_1 سے اور دوسری کو b_2 سے ضرب دو۔ پھر تفریق کر کے حاصل تفریق کو a_1 پر تقسیم کرو، ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے:-

$$x = \frac{b_2m_1 - b_1m_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

اس نتیجہ کو بعض اوقات شکل

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} = 0$$

میں لکھتے ہیں۔ دائیں طرف کا جملہ مقطعہ کہلاتا ہے، اس میں دو قطاریں اور دو ستون ہیں۔ اس کی تفصیل میں ہر ایک رقم دو متبادیہ کا حاصل ضرب ہے۔ اس بلحاظ سے مندرجہ بالا مقطعہ کو دوسرے رتبہ کا مقطعہ کہتے ہیں۔

حروف ب ، ب ، ب کو مقطعہ کے اجزائے افرادی کہتے ہیں۔

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس مقطعہ کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ اس کی قطاروں کو ستونوں میں اور ستونوں کو قطاروں میں بدل دیا جائے۔

۴۸۸۔ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} \text{ اور } \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

یعنی اگر ہم ایک مقطعہ کی دو قطاروں یا دو ستونوں کو ایک دوسرے سے بدل دیں تو جو مقطعہ حاصل ہوگا وہ پہلے مقطعہ سے صرف بلحاظ علامت کے مختلف ہوگا۔

۴۸۹۔ ذیل کی متجانس خطی مساواتوں پر غور کرو۔

$$\text{ب} + \text{ب} + \text{ب} = 0$$

۱۱ لا + ب۱ ما + ج۱ ی = .

۱۲ + ۱۳ + ۱۴ =

ان میں سے لا۱۱۱ کو ساقط کرنے سے حسب دفعہ ۱۶ مشتق ۲ ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$1) (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{n-1} - b_n) = b_1 - b_n$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = 1$$

اس مسئلہ کو بالعموم اس شکل میں لکھا جاتا ہے :-

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸
۲۹	۳۰	۳۱	۳۲
۳۳	۳۴	۳۵	۳۶
۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴
۴۵	۴۶	۴۷	۴۸
۴۹	۵۰	۵۱	۵۲
۵۳	۵۴	۵۵	۵۶
۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴
۶۵	۶۶	۶۷	۶۸
۶۹	۷۰	۷۱	۷۲
۷۳	۷۴	۷۵	۷۶
۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴
۸۵	۸۶	۸۷	۸۸
۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
۹۳	۹۴	۹۵	۹۶
۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

اس میں دائیں طرف کے چاروں گوشے تین قطاروں اور تین ستونوں پر مشتمل ہے۔

۴۹۰۔ — مقطوعہ بالا کی تفصیلی سہرت کو اس کی رقوم کی ترتیب کو قدرے بدلنے سے یوں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

۱) (بہ ج - ب ج) ، ۲) (بہ ج - ب ج)

۲۔ (بی ج - بی ج)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ج} & \text{ج} \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ج} & \text{ج} \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ج} & \text{ج} \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ج} & \text{ج} \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ب} & \text{ب} \\ \hline \text{ج} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

سنتوں سے پھیلائیں یا پہلی قطار سے ہر دو صورتوں میں وہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ اجزائے انفرادی \bar{a} ، \bar{b} ، \bar{c} میں سے کسی ایک کا سر درجہ دوم کا وہ مقطع ہے جو اس جزو انفرادی میں سے گزرنے والے سنتوں اور قطار کو نکال دینے سے باقی رہتا ہے، یہ مقطعات ابتدائی مقطع کے صغائر کہلاتے ہیں اس لحاظ سے مساوات (۱) کی دائیں جانب کے رکن کو اس طرح

$$\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} = \bar{d}$$

کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں \bar{a} ، \bar{b} ، \bar{c} بالترتیب \bar{a} ، \bar{b} ، \bar{c} کے صغائر ہیں۔

نیز مساوات (۲) سے مقطع مذکورہ

$$\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} = \bar{d}$$

کے مساوی ہے جہاں \bar{a} ، \bar{b} ، \bar{c} بالترتیب \bar{a} ، \bar{b} ، \bar{c} کے صغائر ہیں

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bar{a} & \bar{b} \\ \hline \bar{b} & \bar{c} \\ \hline \bar{c} & \bar{d} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{a} & \bar{b} \\ \hline \bar{b} & \bar{c} \\ \hline \bar{c} & \bar{d} \\ \hline \end{array}$$

$$= (\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) - (\bar{b} - \bar{c} + \bar{d}) + (\bar{c} - \bar{d} + \bar{e}) = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c} - \bar{b} + \bar{c} - \bar{d} + \bar{e} - \bar{c} + \bar{d} - \bar{e} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$$

$$= (\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) - (\bar{b} - \bar{c} + \bar{d}) + (\bar{c} - \bar{d} + \bar{e}) = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c} - \bar{b} + \bar{c} - \bar{d} + \bar{e} - \bar{c} + \bar{d} - \bar{e} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$$

اس لئے

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \bar{a} & \bar{b} \\ \hline \bar{b} & \bar{c} \\ \hline \bar{c} & \bar{d} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{a} & \bar{b} \\ \hline \bar{b} & \bar{c} \\ \hline \bar{c} & \bar{d} \\ \hline \end{array}$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگر دو متصل ستونوں کو یا متصل قطاروں کو باہم بدل دیا جائے تو مقطعہ کی علامت بدل جاتی ہے لیکن عددی قیمت میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔
اگر ہم اختصار کی خاطر مقطعہ

ج	ب	ا
ج	ب	ا
ج	ب	ا

کو (ا ب ج) سے تعبیر کریں تو جو نتیجہ ہم نے ابھی حاصل کیا ہے اس کو یوں بھی لکھا جاسکتا ہے: (ب ا ج) = (ا ب ج)۔ (ا ب ج) اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$(ج ا ب) = (ا ج ب) = (ا ب ج)$$

۴۹۳۔ اگر ایک مقطعہ کے دو ستون یا دو قطاریں متماثل ہوں تو

مقطعہ صفر ہو جاتا ہے۔
فرض کرو کہ مقطعہ کی قیمت ق ہے، تب دو ستونوں یا دو قطاروں کو باہم بدلنے سے مقطعہ کی قیمت 'ق' ہو جاتی ہے، لیکن ظاہر ہے کہ متماثل قطاروں اور ستونوں کو بدلنے سے مقطعہ مذکورہ میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوسکتی، اسلئے ق = ق یعنی ق =، پس ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$ا ب ج = ج ا ب = ج ب ا = ق$$

$$ب ا ج = ج ا ب = ج ب ا = ق$$

$$ا ج ب = ج ا ب = ج ب ا = ق$$

۴۹۴۔ اگر کسی قطار یا ستون کے ہر ایک جزوِ افرادی کو ایک ہی جزوِ ضربی سے ضرب دیا جائے تو مقفوعہ مذکور اس جزوِ ضربی سے ضرب کھا جاتا ہے۔

$$\begin{array}{c|c|c} \text{م} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{م} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{م} & \text{ب} & \text{ج} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ج} \\ \text{ج} \end{array} = \begin{array}{c} \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} - \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} + \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} \\ \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} - \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} + \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} \\ \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} - \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} + \text{م} \cdot \text{ب} \cdot \text{ج} \end{array}$$

۴۹۵۔ اگر ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی کسی اور قطار یا ستون کے متناظر جزوِ افرادی کا ایک ہی ضعف ہو تو مقفوعہ کی قیمت صفر ہوگی۔
 اگر ایک مقفوعہ کی کسی ایک قطار یا ستون کا ایک جزوِ افرادی دو رقوم پر مشتمل ہو تو مقفوعہ مذکور دو مقطعات کے حامل جمع کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ مثلاً

$$\begin{array}{c|c|c} \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} = \begin{array}{c|c|c} \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array} + \begin{array}{c|c|c} \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} + \text{ج} & \text{ب} & \text{ج} \end{array} \bigg| \begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ب} \\ \text{ب} \end{array}$$

کیونکہ دائیں طرف کا جملہ

$$\begin{aligned} &= (\text{ب} + \text{ج}) \cdot \text{ب} - (\text{ب} + \text{ج}) \cdot \text{ب} + (\text{ب} + \text{ج}) \cdot \text{ب} \\ &= (\text{ب} \cdot \text{ب} - \text{ب} \cdot \text{ب} + \text{ب} \cdot \text{ج} - \text{ب} \cdot \text{ج} + \text{ج} \cdot \text{ب} - \text{ج} \cdot \text{ب}) + (\text{ب} \cdot \text{ب} - \text{ب} \cdot \text{ب} + \text{ب} \cdot \text{ج} - \text{ب} \cdot \text{ج} + \text{ج} \cdot \text{ب} - \text{ج} \cdot \text{ب}) \end{aligned}$$

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

اسی طرح سے اگر کسی ایک قطار یا ستون کا ہر ایک جزوِ افرادی م رقوم پر مشتمل ہو تو اس مقفوعہ کو م مقطعات کے حامل جمع کے

مثال ۲- $\begin{vmatrix} 21 & 19 & 46 \\ 12 & 13 & 39 \\ 24 & 22 & 81 \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کرو۔

$$\begin{vmatrix} 21 & 19 & 10 \\ 12 & 13 & 0 \\ 24 & 22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 21 & 19 & 56+10 \\ 12 & 13 & 39+0 \\ 24 & 22 & 62+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 19 & 46 \\ 12 & 13 & 39 \\ 24 & 22 & 81 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 19 & 10 \\ 1 & 13 & 0 \\ 2 & 22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+19 & 19 & 10 \\ 1+13 & 13 & 0 \\ 2+22 & 22 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 19 & 10 \\ 12 & 13 & 0 \\ 24 & 22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 21 & 19 & 56 \\ 12 & 13 & 39 \\ 24 & 22 & 62 \end{vmatrix}$$

$$23- = 43-20 = \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 22 \end{vmatrix} = 10 =$$

۲۹۶- ذیل کے مقطعہ پر غور کرو:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

دفعہ قبل کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ یہ ذیل کے تین مقطعات

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

کے مساوی ہے۔ ان میں سے آخر کے دو مقطعات حسب دفعہ ۲۹۴ نتیجہ صریح معلوم ہو جاتے ہیں۔ اس سے ظاہر ہے کہ مفروضہ مقطعہ کی قیمت اس مقطعہ کے مساوی ہے جو اٹلی مقطعہ کے

پہلے ستون کے اجزائے افردی میں سے باقی ستونوں کے متناظر اجزائے
افردی کے مساوی ضعف کفریق کرنے اور باقی ستونوں کو حسب سابق
برقرار رکھنے سے ٹال ہوتا ہے۔
برعکس اس کے

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \end{array}$$

بشرط ستون کے متعلق برابری اور ثابت کی جا چکی ہے وہ
تو ایک قطار یا ستون کے لئے درست ہے۔ پس ثابت ہوا کہ
کسی ایک مقطع یا مختصر کرنے میں ہم کسی قطار یا ستون کو ایک
اور نیز قطار یا ستون کے بدل سکتے ہیں جو حسب ذیل طریقہ سے
ہوتا ہے۔

اُس ستون یا قطار کو جس کے اجزائے افردی کو آپ بدلنا
چاہتے ہیں اور ان میں باقی ایک یا زیادہ قطاروں یا ستونوں سے
مشتمل اجزائے افردی کے مساوی ضعف جمع یا تفریق کر دو۔
تو یہ معلوم ہوگا کہ کسی مقطع کو اس کی
وہ یا زیادہ قطاروں یا ستونوں کو ایک ساتھ بدلنے سے فوراً مختصر
کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \text{ا ب} & \text{ا ب} & \text{ا ب} \\ \hline \end{array}$$

لیکن اس قاعدہ کو استعمال کرتے وقت یہ احتیاط رکھنی چاہئے کہ

تفریق کر دئے تیسرے ستون کے لئے دئے ہوئے مقطعہ کے تیسرے ستون کے اجزائے افردی میں سے دوسرے ستون کے متناظر اجزائے افردی تفریق کر دو۔ دوسری منزل پر اجزائے ضربی '۳' اور '۴' باہر نکال لو۔ تیسری منزل پر پہلی قطار کو برقرار رکھو۔ دوسری نئی قطار کے لئے دوسری قطار کے اجزائے افردی میں سے پہلی قطار کے متناظر اجزائے افردی تفریق کر دو۔ تیسری نئی قطار کے لئے پہلی قطار کے اجزائے افردی کو ۲ سے ضرب دیکر تیسری قطار کے متناظر اجزائے افردی میں سے تفریق کر دو۔ بعد کی منزلیں بالکل آسان ہیں

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱۲ & ۱۲ & ج-ب-۱ \\ \hline ۲ب & ج-ب-۱ & ۲ب \\ \hline ۲ج & ج-ب-۱ & ۲ج-۱ب \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱+ب+ج & ۱+ب+ج & ۱+ب+ج \\ \hline ۲ب & ج-ب-۱ & ۲ب \\ \hline ۲ج & ج-ب-۱ & ج-ب-۱ \\ \hline \end{array}$$

مذہب بالا مقطعہ =

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۱ & ۱ \\ \hline ۲ب & ج-ب-۱ & ۲ب \\ \hline ۲ج & ج-ب-۱ & ج-ب-۱ \\ \hline \end{array}$$

(۱+ب+ج) × =

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۱ & ۱ \\ \hline ۲ب & ج-ب-۱ & ۲ب \\ \hline ۲ج & ج-ب-۱ & ج-ب-۱ \\ \hline \end{array}$$

(۱+ب+ج) × =

(۱+ب+ج) × =
[تشریح۔ پہلے نئے مقطعہ میں پہلی قطار ابتدائی مقطعہ کی تین قطاروں کے اجزائے افردی کے حامل جمع کے مساوی ہے اور دوسری اور تیسری قطاریں وہی ہیں، تیسرے نئے مقطعہ میں پہلے ستون کو برقرار رکھا گیا ہے اور دوسرے نئے ستون کے اجزائے افردی دوسرے ستون کے اجزائے افردی

لیکن مساواتیں (۳) پوری ہونگی اگر مساواتیں (۱) پوری ہوں اور مساواتیں (۱) پوری ہونگی اگر یا

$$(۵) \dots\dots\dots = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

یا لا = اور کلہا سے
یعنی اصولاً ذکر شرط سنی وجہ سے

$$(۶) \dots\dots\dots = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

پس اگر مساواتیں (۵) اور (۶) پوری ہوں تو مساوات (۴) بھی پوری ہونگی لہذا مساوات (۴) کے مقطع میں مساواتوں (۵) اور (۶) کے مقطعات بشمول اپنے ضریب شامل ہونگے۔ نیز (۴) کے مقطع کے ابعاد اور مساواتوں (۵) اور (۶) کے مقطعات کے حاصل ضرب کے ابعاد پر غور کرنے سے ظاہر ہے کہ (۴) کا اگر کوئی اور جزو ضربی ہو تو وہ صرف عددی ہوگا، ہندسہ۔

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} + \text{ب} & \text{ب} + \text{ب} \\ \text{ب} + \text{ب} & \text{ب} + \text{ب} \end{vmatrix}$$

کیونکہ مساواتوں کے دونوں طرف $\text{ب} + \text{ب}$ کے جو سر ہیں ان کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ مذکورہ بالا عددی سر ہے۔

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب} + \text{ب} & \text{ب} + \text{ب} \\ \text{ب} + \text{ب} & \text{ب} + \text{ب} \end{vmatrix}$$

نتیجہ صریح۔
مندرجہ بالا طریقہ ثبوت بالکل عام ہے اور ہر رتبہ کے مقطعات پر اس کا مساوی طور پر اطلاق ہو سکتا ہے۔

19	17	13	(۲)	1	1	1	(۱)
۲۰	۱۷	۱۴		۳۳	۳۷	۳۵	
۲۱	۱۸	۱۵		۲۵	۲۶	۲۳	

ما - می - لا	(۵)	گ - ہ - ف - ج	(۴)	۱۳	۳	۲۳	(۳)
ما - می - لا		گ - ہ - ف - ج		۳۰	۷	۵۳	
ما - می - لا		گ - ہ - ف - ج		۴۹	۹	۷۰	

ج - ب - ج - ا	(۶)	ج - ب - ج - ا	(۵)	۱	۱	۱	(۶)
ج - ب - ج - ا		ج - ب - ج - ا		۱	۱	۱	
ج - ب - ج - ا		ج - ب - ج - ا		۱	۱	۱	

ج - ب - ج - ا	(۸)	ج - ب - ج - ا	
ج - ب - ج - ا		ج - ب - ج - ا	
ج - ب - ج - ا		ج - ب - ج - ا	

اگر اکا ایک جذرا لکھ دسمہ ہو تو ذیل کے دو مقطعات کی قیمتیں معلوم کرو

سس	سس	ا	(۱۰)	سس	سس	ا	(۹)
سس	ا	سس		سس	سس	ا	
ا	سس	سس		سس	ا	سس	

۱۱۔ ذیل کی مساواتوں

ا + ج + م + ب = ن = ج + ل + ب + م + ا = ب + ل + ا + م + ج = ن

میں سے ل، م، ن کو سا قطہ کرو اور نتیجہ کو سادہ ترین شکل میں لکھو

۱۲۔ مقطعات کو پھیلائے بغیر ثابت کرو کہ

ج	ب	ا	ج	ب	ا	ج	ب	ا
لا	ما	می	لا	ما	می	لا	ما	می
ف	ق	ر	ف	ق	ر	ف	ق	ر

۱۳۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

اگر اکا ایک جذر الکعب دسم ہو تو ذیل کے دو مقطعات کی قیمتیں معلوم کرو

۱	۱	۱	(۱۰)	۱	۱	۱	(۹)
۱	۱	۱		۱	۱	۱	
۱	۱	۱		۱	۱	۱	

۱۱۔ ذیل کی مساواتوں

۱۔ ج + م + ب = ن = ج + ل + ب + م + ا = ب + ل + ا + م + ج + ن =
 میں سے ل، م، ن کو سا قط کرو اور نتیجہ کو سادہ ترین شکل میں لکھو
 ۱۲۔ مقطعات کو پھیلائے بغیر ثابت کرو کہ

<p>ج - ب - ج - ا</p>	<p>ج - ب - ج - ا</p>	<p>ج - ب - ج - ا</p>
----------------------	----------------------	----------------------

۱۳۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

$\begin{array}{ c c c } \hline ۱۰ & ۱۱ & ۲-۱۵ \\ \hline ۱۶ & ۱۷ & ۳-۱۱ \\ \hline ۱۸ & ۱۹ & ۴-۶ \\ \hline \end{array}$	$(۲) \quad = \quad$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۱ & ۱ \\ \hline ۲ & ۲ & ۲ \\ \hline ۳ & ۳ & ۳ \\ \hline \end{array}$
<p>فنی کی مثالیں کو ثابت کرو:</p>		
$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$	$= \quad$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$
$(۱-۲) (۲-۳) (۳-۱) =$	$=$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$
$(۱-۲) (۲-۳) (۳-۱) =$	$=$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$
$(۱-۲) (۲-۳) (۳-۱) =$	$=$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$
$(۱-۲) (۲-۳) (۳-۱) =$	$=$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$
$(۱-۲) (۲-۳) (۳-۱) =$	$=$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$
$(۱-۲) (۲-۳) (۳-۱) =$	$=$	$\begin{array}{ c c c } \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline ۷ & ۸ & ۹ \\ \hline \end{array}$

۲۰۔ $\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ب} \end{vmatrix}$ کو مقطوعہ کی شکل میں لکھو۔

۲۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات $\text{ل} + \text{م} + \text{ن} = \text{ی}$ ۔ بھول
مقداروں کی قیمتوں کے تین جٹوں $(\text{ل} + \text{ب} + \text{ج})$ $(\text{ل} + \text{ب} + \text{ج})$ $(\text{ل} + \text{ب} + \text{ج})$
 $(\text{ل} + \text{ب} + \text{ج})$ سے پوری ہو اور ثابت کرو کہ یہ شرط وہی ہے جو تین
مساواتوں $\text{ل} + \text{م} + \text{ن} = \text{ی}$ $\text{ل} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ی}$ $\text{ل} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ی}$ سے
 $\text{ل} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ی}$ کے ایک ساتھ $\text{ل} + \text{م} + \text{ن} = \text{ی}$ سے پورے ہونے کی
شرط ہے۔

۲۲۔ $\begin{vmatrix} \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} \\ \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} \end{vmatrix}$ کی قیمت معلوم کرو

۲۳۔ ثابت کرو کہ $\begin{vmatrix} \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} \\ \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} \end{vmatrix}$ جہاں $\text{ل} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ی}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

۲۴۔ $\begin{vmatrix} \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} \\ \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} & \text{ل} + \text{ب} + \text{ج} \end{vmatrix}$ اس سے ذیل کا مسئلہ مستنبط کرو جو آئیلر سے منسوب ہے۔
اگر دو جٹوں میں ہر ایک چار مربعوں کے حامل جمع پر مشتمل ہو تو ان
جٹوں کے حامل ضرب کو چار مربعوں کے حامل جمع کی شکل میں لکھا
جاسکتا ہے۔

ذیل کی متماثلہ مساواتیں ثابت کرو۔

$$\begin{aligned} & \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \\ & \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \\ & \text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \end{aligned}$$

ان کو بالترتیب ل، - ل، ل، سے ضرب دو جہاں ل، ل، ل، بالترتیب ل، ل، ل، کے صفا کر ہیں ذیل کے مقطع میں

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ق} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$$

ان مال ضربوں کو جمع کرو۔ تب ما اور ی کے سر درفہ ۴۹۳ کے روابط کی رو سے محدود ہو جاتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$(\text{لا} - \text{ل} - \text{ل} + \text{لا} + \text{لا}) + (\text{د} - \text{ل} - \text{د} + \text{د} + \text{د}) =$$

اسی طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$(\text{ب} - \text{ب} - \text{ب} + \text{ب} + \text{ب}) + (\text{د} - \text{ب} - \text{د} + \text{د} + \text{د}) =$$

$$\text{اور } (\text{ج} - \text{ج} - \text{ج} + \text{ج} + \text{ج}) + \text{ی} + (\text{د} - \text{ج} - \text{د} + \text{ج} + \text{ج}) =$$

$$\text{اب ل} - \text{ل} - \text{ل} + \text{ل} + \text{ل} = - (\text{ب} - \text{ب} - \text{ب} + \text{ب} + \text{ب})$$

$$\text{ج} - \text{ج} - \text{ج} + \text{ج} + \text{ج} = \text{ق}$$

پس حل مطلوبہ کو ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

۱-

ی

۲-

لا

$\begin{array}{ c c c } \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ج} \\ \hline \end{array}$
--	--	--	--

یا زیادہ متشاکل

لا	ما	می	ا
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د

۵۰۔ فرض کر کہ ہمیں چار متجانس خطی مساواتوں کا ایک نظام دیا ہے:

$$\begin{aligned} & \text{و لا} - \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{ه} \\ & \text{و لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{ه} \\ & \text{و لا} - \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{ه} \\ & \text{و لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{ه} \end{aligned}$$

تب آخر کی تین مساواتوں سے حسب وضع ما قبل

لا	ما	می	ا
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د

پہلی مساوات میں یقیناً مندرجہ کرنے سے حاصل اسقاط مطلوب یہ ہے:-

ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د	ب ج د

اس کو زیادہ مختصراً طور پر حسب ذیل شکل میں بھی لکھا جاسکتا ہے:-

ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د
ب ج د	ب ج د	ب ج د

جہاں دائیں طرف کا جملہ چوتھے درجہ کا ایک مقطع ہے۔

نیز ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $ل$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ کے سرسری اپنی صحیح علامت کے بالترتیب دو صفاؤں ہیں جو ان اجزائے افرادی میں سے گذرنے والے ستون اور قطار کو نکال دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔
۵۰۔ زیادہ عام طور پر اگر ہمارے پاس n متجانس خطی مساویں

$$ل_1 + ل_2 + ل_3 + ل_4 + ل_5 + ل_6 + ل_7 + ل_8 + ل_9 + ل_{10} = 0$$

$$ل_1 + ل_2 + ل_3 + ل_4 + ل_5 + ل_6 + ل_7 + ل_8 + ل_9 + ل_{10} = 0$$

$$ل_1 + ل_2 + ل_3 + ل_4 + ل_5 + ل_6 + ل_7 + ل_8 + ل_9 + ل_{10} = 0$$

ہوں جن میں n مجهول مقادیر $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ، $ل_4$ ، $ل_5$ ، $ل_6$ ، $ل_7$ ، $ل_8$ ، $ل_9$ ، $ل_{10}$ شامل ہوں تو ہم ان مقداروں کو ساقط کر کے نتیجہ کو حسب ذیل شکل میں لکھ سکتے ہیں:-

$$= \begin{vmatrix} ل_1 & ل_2 & ل_3 & ل_4 & ل_5 & ل_6 & ل_7 & ل_8 & ل_9 & ل_{10} \\ ل_1 & ل_2 & ل_3 & ل_4 & ل_5 & ل_6 & ل_7 & ل_8 & ل_9 & ل_{10} \\ ل_1 & ل_2 & ل_3 & ل_4 & ل_5 & ل_6 & ل_7 & ل_8 & ل_9 & ل_{10} \end{vmatrix}$$

اس مساوات کے دائیں جانب کا کمرکن ایک مقطع ہے جس میں n قطاریں اور n ستون ہیں، ایسے مقطع کو n دیں مرتبہ کا مقطع کہتے ہیں۔

مقطعات کی اس عام ترین شکل پر بحث کرنا کتاب ہذا کے حدود سے باہر ہے تاہم یہ بیان کر دینا کافی ہے کہ مقطعات کے وہ خواص جو دوسرے اور ملکہ مرتبہ کے مقطعات کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں وہ بالکل عام ہیں اور ہر مرتبہ کے مقطعات پر ان کا

اور ایک ایک ہر ستون سے، نیز نصف رقموں کی علامت مثبت ہے اور نصف کی منفی۔ سب اجزائے ترکیبی کی علامتیں حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتی ہیں، پہلا جزو ترکیبی Δ ب ج ہے، اس کے لاحقے ترتیب صحابی میں ہیں اس کی علامت مثبت ہے، اگر کو ہم جزو رئیس سمجھیں گے۔ باقی سب اجزائے ترکیبی اس کے اعداد لاحقہ کی ترتیب بدلنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ کسی جزو ترکیبی کی علامت معلوم کرنے کا یہ قاعدہ ہے: اگر جزو رئیس کے لاحقوں میں سے دو دو لیکر ان کی ترتیب بدلتے جائیں یہاں تک کہ مذکورہ جزو ترکیبی حاصل ہو جائے تو ایسی ترتیبوں کے بدلنے کی تعداد اگر جفت ہو تو اس جزو ترکیبی کی علامت مثبت ہوگی اور اگر طاق ہو تو منفی۔ مثلاً جزو ترکیبی Δ ب ج، جزو رئیس کے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم ایک بار بدلنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے اس کی علامت منفی ہوگی، جزو ترکیبی Δ ب ج پہلے اعداد ۱ اور ۳ کو باہم بدلنے سے اور پھر اعداد ۱ اور ۲ کو باہم بدلنے سے حاصل ہوتا ہے، اس لئے اس کی علامت مثبت ہے۔

۵۰۳۔ پس وہ مقطعہ جس کا جزو رئیس Δ ب ج جہم ہے علامت $\pm \Delta$ ب ج جہم سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

علامت $\pm \Delta$ ب ج جہم جو جزو رئیس کے باقیل و ج کی گئی ہے اس سے ان تمام اجزائے ترکیبی کا حاصل جمع فراہم ہے جو اس کے اعداد لاحقہ مختلف ترتیبوں سے بدلنے سے حاصل ہو سکتے ہیں جبکہ ہر جزو ترکیبی کے باقیل مناسب علامت و ج کی جائے۔

بعض اوقات مقطعہ کو اس کے جزو رئیس کے گروہ خطوط و عدائی لکھنے سے اور بھی زیادہ مختصر شکل میں لکھ سکتے ہیں یعنی

(Δ ب ج جہم)، $\pm \Delta$ ب ج جہم کی مزید مختصر شکل

مثال - مقطعہ ذیل کی قیمت معلوم کرو:-

۳۸	۲۰	۱۱	۳۰
۹	.	۳	۶
۳	۳۶	۲۰	۱۱
۲۲	۱۴	۶	۱۹

پہلے ستون کے ہر ایک جزو فردی میں سے دوسرے ستون کے متناظر جزو
افردی کا گنا تفریق کر دو، نیز چوتھے ستون کے ہر ایک جزو فردی میں
سے دوسرے ستون کے متناظر جزو فردی کا تین گنا تفریق کر دو، اس طرح
سے باقی حاصل ہوتا ہے:-

۵	۲۰	۱۱	۸
.	.	۳	.
۹	۳۶	۲۰	۱۵
۴	۱۴	۱۹	۷

اور چونکہ دوسری قطار کے سب اجزائے فردی سوائے ایک کے صفر ہیں -

۵	۲۰	۸	$\times ۳ =$	۵	۲۰	۸	$\times ۳ =$
۵	۱۹	۸		۹	۳۶	۱۵	
۴	۱۴	۷		۴	۱۴	۷	

			$\times ۳ =$
۵	۸	۳	
۴	۷		

۵۰۵ - ذیل کی مثالوں میں جو ترکیبیں استعمال کی گئی ہیں وہ بعض اوقات

بڑی مفید ثابت ہوئی ہیں :

مثال ۱ - ثابت کرو کہ

$(ا + ب + ج + د) = (ا - ب - ج - د)$	ا	ب	ج	د
$(ا + ب - ج - د)$	ب	ا	د	ج
$(ا - ب + ج - د)$	ج	د	ا	ب
$(ا - ب - ج + د)$	د	ج	ب	ا

سب قطاروں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $(ا + ب + ج + د)$ منقطعہ مذکور کا ایک جزو ضربی ہے پہلی اور تیسری قطاروں کو جمع کرنے اور حاصل جمع سے دوسری اور چوتھی قطاروں کے حاصل جمع کو تفریق کرنے سے ظاہر ہے کہ $ا - ب + ج - د$ بھی ایک جزو ضربی ہوگی اسی طرح سے یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ $ا - ب - ج + د$ اور $ا + ب - ج - د$ بھی اجزائے ضربی ہیں۔ بقیہ جزو ضربی صرف عددی ہے اور $ا$ والی رقموں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ عددی جزو ضربی اسے پس نتیجہ مطلوبہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ

$(ا - ب)(ا - ج)(ا - د)(ا - ب - ج - د) =$	ا	ا	ا	ا
$(ج - د)$	د	ج	ب	ا
	د	ج	ب	ا
	د	ج	ب	ا

اگر $ا = ب$ تو پہلا اور دوسرا ستون متماثل ہو جاتے ہیں اور منقطعہ بالا صفر ہو جاتا ہے۔ پس $(ا - ب)$ منقطعہ مذکور کا ایک جزو ضربی ہے (دیکھو دفعہ ۵۱۴)

اسی طرح باقی حالات $(ا - ج)$ ، $(ا - د)$ ، $(ا - ب - ج)$ ، $(ا - ب - د)$ ، $(ا - ج - د)$ میں سے ہر ایک جملہ جزو ضربی ہے، ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب چھ ابعاد کا ہے اور چونکہ منقطعہ زیر بحث بھی چھ ابعاد کا ہے اس لئے باقی جزو ضربی محض عددی ہوگا۔ نیز $ب - ج + د$ والی رقم کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ یہ عددی جزو ضربی اسے پس نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے

امثلہ نمبری ۳۳ (ب)

ذیل کے مقطعات کی قیمتیں محسوب کرو۔

۶	۱۰	۱۳	۷		۱	۱	۱	۱		
۳	۷	۹	۵	-۲	۳	۳	۳	۱	-۱	
۷	۱۱	۱۲	۸		۱۰	۶	۳	۱		
۳	۶	۱۰	۴		۲۰	۱۰	۵	۱		
۱	۱	۱	۰		۱	۱	۱	۵		
۵	۵	ج + ۵	۱	-۳	۱	۱	۵	۱	-۳	
ب + ۵	۵	ب + ج + ۵	۱		۱	۵	۱	۱		
ج + ۵	ج	ج	۱		۵	۱	۱	۱		
۱	۱	۱	۵ + ۱		۴	۱	۲	۳		
۱	۱	۵ + ۱	۱	-۶	۱۴	۲	۲۹	۱۵	-۵	
۱	ج + ۱	۱	۱		۱۷	۳	۱۹	۱۶		
۵ + ۱	۱	۱	۱		۳۸	۸	۲۹	۳۳		
۰	۵	۵	۰		۵	۵	۵	۰		
ب	ج	۰	-۵	-۸	۵	۵	۰	۵	-۵	
۵	۰	ج	-۵		۵	۰	۵	۵		
۰	-۵	-۵	-۵		۰	۵	۵	۵		
۵	ج	ب	د		۵	ب	ب	۵		
۵	۵ + ۱	۵ + ۱	۵ + ۱ + ج + ۵	-۶	۵ + ۱	۵ + ۱	۵ + ۱	۵		
۵	۵ + ۱	۵ + ۱ + ج + ۵	۵ + ۱ + ج + ۵ + ۱ + ج + ۵		۵ + ۱	۵ + ۱	۵ + ۱	۵		
۵	۵ + ۱	۵ + ۱ + ج + ۵	۵ + ۱ + ج + ۵ + ۱ + ج + ۵		۵ + ۱	۵ + ۱	۵ + ۱	۵		

۱۰۔ اگر اکا ایک جذرا کذب سمجھا ہو تو ثابت کرو کہ

1	1	1	1	- 6/24	True	True	True	1
1	1	1	1		1	True	True	True
1	1	1	1		True	1	True	True
1	1	1	1		True	True	1	True

اور اس سے حاصل کرو کہ دائیں جانب کے مقطع کی قیمت ۱۲ - ۳ ہے۔

۱۱- اگر (ف) به (ج) و (ز) به (ج) و (ف) به (ک) و (ب) به (ف) می =

رجہ - فنگ (وہ گناہ جو) + (اف گہ) ی =

(ببگ - هف) (زف - گه) (ما - هه) (وب - ی -

تو فانی ہو کر

۱. پ ج + ۲ ش گ = ۱ ف + ۳ ب گ = ج ۵ =

معاذ اللہ! فیل کو تل کر دو۔

[illegible]

۱۳- لا + ما + ی + خ = ا
ولا - ب + ج + د = مک
ولا + ب + ج + د = کا
ولا + ب + ج + د = مک

۱۵- ثابت کردن

ب + ج - د - د	ب ج - د	ب ج (د + د) - د (ب + ج)
ج + د - ب - د	ج د - ب	ج د (ب + د) - ب د (ج + د)
د + ب - ج - د	د ب - ج	د ب (ج + د) - ج د (د + ب)

$$= (ج-ب)(ج-ا)(ا-ب)(ا-د)(د-ب)(د-ج)$$

۱۴ - بیست و یکم

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{ا} - \text{و} - (\text{ب} - \text{ج}) \\
 \text{ب} - \text{ا} - (\text{ج} - \text{و}) \\
 \text{ج} - \text{ب} - (\text{و} - \text{ا})
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c}
 (\text{ب} - \text{ج}) (\text{ج} - \text{و}) (\text{و} - \text{ا}) \\
 (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} + \text{و} + \text{ب})
 \end{array}
 \end{array}$$

۱۷۔ ثابت کر دو کہ

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{ا} - \text{و} - \text{ب} \\
 \text{و} - \text{ب} - \text{ا} \\
 \text{ب} - \text{ا} - \text{و}
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c}
 \text{ا} - \text{و} - \text{ب} \\
 \text{و} - \text{ب} - \text{ا} \\
 \text{ب} - \text{ا} - \text{و}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{جہاں } \text{ا} = \text{و} - \text{ا} - \text{د} + ۲ \text{ ج} - ۲ \text{ ب} - \text{ف} \\
 \text{ب} = \text{ع} - \text{ب} + ۲ \text{ ا} - \text{ج} - ۲ \text{ د} - \text{ف} \\
 \text{ج} = \text{ج} - \text{ج} + \text{ف} + ۲ \text{ و} - \text{ع} - ۲ \text{ ب} - \text{د}
 \end{array}$$

۱۸۔ اگر ایک مشطہ (ن) دیں رتبہ کا ایسا ہو کہ اس کی پہلی، دوسری، تیسری.....
 ن دیں نظاروں کے اجزائے، فردی بالترتیب پہلے، دوسرے، تیسرے.....
 ن دیں رتبہ کے اعداد مشککہ ہوں تو ثابت کر دو کہ مقطوعہ کی قیمت
 اس کے مساوی ہے۔

چوتھوں باب

متفرق مسائل و امثلہ

۵۰۶۔ ہم اس باب کے شروع میں صورت جبریہ کے قیام کے متعلق چند باتیں درج کریں گے اور اس اثناء میں چند دیگر اساسی کلیات کی نظر ثانی کریں گے جو پیشتر ازیں ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۵۰۷۔ جبریہ اصولوں کی بحث میں ہمیشہ تحلیلی طرز عمل سے کام لیا جاتا ہے شروع میں ہی ہم نئے نئے نام اور قواعد مندرج نہیں کرتے بلکہ مجرد اعداد کے حساب کے متعلق اپنی معلومات کی مدد سے پہلے چند ایسے غل اور کلیات ثابت کرتے ہیں جنکی تصدیق ہر مخصوص صورت میں نہایت آسانی سے ہو سکتی ہے ان اعمال کے عام نظریہ کو ہی درحقیقت جبر و مقابلہ سے موسوم کیا جاتا ہے۔ اس اختلاف کی بنا پر جبر و مقابلہ کی بعض اوقات دو قسمیں قرار دی جاتی ہیں۔ حسابی جبر و مقابلہ اور علامتی جبر و مقابلہ۔ اول الذکر قسم میں پہلے ہم اپنی علامتوں کو وہ معنی دیتے ہیں جو اذروئے حساب بخوبی سمجھ میں آسکیں اور ان سے اعمال کے اساسی قوانین مستنبط کرتے ہیں۔ آخر الذکر قسم میں ہم پہلے یہ مان لیتے ہیں کہ حسابی الجبر کے قوانین تمام صورتوں میں درست ہیں خواہ ان میں کی علامتوں کی نوعیت کچھ ہی ہو اور پھر یہ دریافت کرتے ہیں کہ ان علامات کو کیا معنی پہنائے جائیں کہ یہ ان قوانین کے ماتحت رہیں۔ پس جوں جوں ہم معمولی حساب کی حدود تک نکل کر اوپر چڑھتے جاتے ہیں نئے نئے نتیجے نکلتے آتے ہیں۔ نئے نئے الفاظ استعمال کرنے پڑتے ہیں اور علامتوں کو ایسے معنی دینے پڑتے ہیں جو ابتدائی تقریفات میں مضمون نہ تھے۔ نیز جس طریقہ سے الجبر کے عام کلیات منضبط

ہوتے ہیں اُس کی رُو سے ان کی عمومیت اور قیام کے متعلق ہمارے ذہن میں
وفاق رہتا ہے خواہ وہ متقاد پر جن پر ان عنوان بط کا اطلاق ہو اور رُو سے
حساب سمجھ میں نہ آسکیں۔

۵۰۸۔ اگر ہم اپنی توجہ کو محض علامات کی مثبت صحیح قیمتوں تک محدود
رکھیں تو ذیل کے کلیات حساب کی ابتدائی تعریفات کی رُو سے آسانی ثابت
ہو سکتے ہیں۔

۱۔ قانون مبادلہ جسکو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں۔

(۱) جمع اور تفریق کا عمل کسی ترتیب میں ہو سکتا ہے۔

مثلاً $ا + ب - ج = ا - ج + ب = ب - ج + ا$

(۲) ضرب اور تقسیم کا عمل کسی ترتیب میں ہو سکتا ہے۔

مثلاً $ا \times ب \div ج = ا \div ج \times ب = ب \div ج \times ا$

$ا \div ب \times ج = ا \times ج \div ب = ا \times ج \div ب$ وغیرہ

$ا \div ب \div ج = ا \div ب \times ج = ا \times ج \div ب = (ا \times ج) \div ب$

۱۔ کلیہ تقسیم جس کو ہم ذیل کے الفاظ میں بیان کرتے ہیں ضرب یا تقسیم کے عمل جمع یا
تفریق کے عملوں پر پھیلائے جاسکتے ہیں۔

(۱۔ ب + ج) م = ا م - ب م + ج م

(۱۔ ب) (ج - د) = ا ج - ا د - ب ج + ب د

[دیکھو ابتدائی الجبرا صفحات ۳۳ اور ۳۴]

اور چونکہ تقسیم کا عمل محض ضرب کے عمل کا الٹ ہے اس لئے تقسیم کے متعلق
کلیہ تقسیم جداگانہ بحث کا محتاج نہیں۔

۳۔ کلیات قوت نما

(۱) $ا^n \times ب^n = (ا \times ب)^n$

$ا^n \div ب^n = (ا \div ب)^n$

(۲) $(ا \times ب)^n = ا^n \times ب^n$

[دیکھو ابتدائی الجبرا صفحات ۲۲۳ تا ۲۳۵]

ان قوانین کو جو اوپر سدرج ہوئے تفسیر مصنفین کی بنیاد سمجھنا چاہیے۔ اور یہ سب اس معروضہ کی بنیاد پر ثابت ہے۔ چنانچہ میں کہ اسٹوکیسٹک منہ رنویا علامات مثبت صحیح عدد ہیں اور ان کے استعمال میں ایسے اعمال ممکن محدود منہ رنویا کے حساب اہمیت ہیں۔ اگر یہ مشروط پوری تاہم نو علامتی جبر و مقابلہ کی رو سے ہم ان لیتے ہیں کہ حسابی جبر و مقابلہ کے قوانین ہر صورت میں برقرار رہتے ہیں اور اس معروضہ کی بنیاد پر جو معنی ان قوانین سے مستنبط ہوں ان کو درست تصور کرتے ہیں اس طرح سے اس امر کی توثیق ہو جاتی ہے کہ جبر و مقابلہ کے قوانین ہر صورت میں درست ہیں اور ان کی وسیع اور عام صورت میں معمولی حساب کے قوانین کی مخصوص صورتیں بھی شامل ہیں۔

۵۰۹۔ قانون مساویہ سے ہم خطوط حدانی کے اوخال و اخراج کے قواعد مستنبط کرتے ہیں (دیکھو ابتدائی جبر و مقابلہ صفحات ۲۱، ۲۲) اور ان قواعد کی مدد سے ہم قانون تقسیم کو بموجب دفعہ ۳۵ ثابت کرتے ہیں۔ مثلاً یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ

$$(1-a)(b+c) = (a-b)c + b(a-c)$$

جہاں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' مثبت صحیح عدد ہیں اور 'ا' بڑا ہے 'ب' سے اور 'ج' بڑا ہے 'د' سے۔ اب اگر ان علامات پر سے تمام قیود اٹھا دی جائیں تو یہ معلوم کرنا کہ اس صورت میں نتائج مذکورہ کے کیا معنی ہونگے علامتی جبر و مقابلہ سے متعلق ہے۔ پس ۱۔ = اور ج =۔ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے ۱۔ (ب) × (ج) = (ب) × ج یعنی دو منفی مقداروں کا حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے۔ نیز ب =۔ اور ج =۔ رکھنے سے ۱ × (د) =۔ = ۱ یعنی مختلف علامت مقدار کا حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

اسی طرح کلیہ تقسیم کے نتیجے سے ہمیں فوراً قانون علامات حاصل ہو جاتا ہے۔ اور آئندہ کے لئے قانون علامات بھی ہمارے مسئلہ اور اساسی قوانین میں سے شمار ہونے لگتا ہے۔

۱۰۔ جبر و مقابلہ کے خواص کو ثابت کرنے کے لئے جس طریقہ سے اساسی

قوانین سے کام لیا جائے تب اس کے متعلق طالب علم اگر چاہے تو ابتدائی الجبرا کے ابواب ۱۴، ۲۰ اور ۲۱ کا مطالعہ کر سکتا ہے۔ یہ مفہوم ہو گا کہ جن رموز اور اعمال کو بظاہر کوئی راست یا ابتدائی مفہوم پیش نہ آئے ہیں انکی تعبیر اسطورہ کی جاتی ہے کہ وہ حسابی جبر و مقابلہ کے قوانین کے مطابق ہوں جائیں۔

۵۱۱۔ قوت نماؤں کے کلیہ پر ابتدائی جبر و مقابلہ کے تیسویں باب میں مفصل بحث کی جا چکی ہے جب ہم اور ان مثبت صحیح اعداد ہوں اور ہم کے قوت ہم براہ راست قوت نامی تعریف سے ثابت کرتے ہیں کہ

$$a^n \times a^m = a^{n+m}, a^n \div a^m = a^{n-m}, (a^m)^n = a^{m \times n}$$

اس کے بعد ہم مان لیتے ہیں کہ ان میں سے پہلا ضابطہ صحیح رہتا ہے جبکہ قوت نماؤں پر سے تمام قوتوں اہتالی جائیں اور اس طرح پر ان رموز کے لئے جن پر ہماری ابتدائی تعریف کا اطلاق نہیں ہوتا ہم حسنی اور مفہوم تجویز کنی کو پیش کرتے ہیں۔ اس طرح سے a^0, a^{-1}, a^{-2} کے لئے جو مفہوم حاصل ہوتے ہیں وہ باقی کے دو قوانین کے عین مطابق ہیں، پس آئندہ لگے لئے قوت نماؤں کے کلیہ کو پوری عمومیت اور کامل موافقت کے ساتھ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۵۱۲۔ باب ہفتم میں ہم نے علامت x یا a کی تعریف یوں کی تھی کہ یہ ربط $x^2 = 1$ کو پورا کرتا ہے۔ اس تعریف سے اور نیز x کو جبر و مقابلہ کے عام ضوابط کے ماتحت لانے سے ہم $1 + x$ کی شکل سے جملات کے خواص پر بحث کر سکتے ہیں۔ $1 + x$ جب کہ جس میں حقیقی اور خیالی مقادیر ملی ہوئی ہیں بعض اوقات ملحق اعداد سے موسوم کرتے ہیں۔ درجات ۱ تا ۱۰۵ کی رُو سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر ہم کسی ملحق عدد پر جمع تفریق، ضرب یا تقسیم کا عمل کریں تو جواب بالعموم خود ایک ملحق عدد ہو گا۔ نیز چونکہ کسی منطق تفاعل پر مندرجہ بالا اعمال کے سوائے کوئی اور عمل نہیں کیا جاتا ہے اس لئے ظاہر ہے کہ کسی ملحق عدد کا کوئی منطق تفاعل بھی ملحق عدد ہوتا ہے۔ $1 + x$ ، $1 + x^2$ ، $1 + x^3$ وغیرہ کی شکل کے جملوں پر علم مثلث کے بغیر مفصل بحث نہیں کی جاسکتی۔ لیکن

ڈی ایئر کے مسئلہ سے برآسانی غائب ہو سکتا ہے کہ ایسے تفاعل
 ۱ + خ ب کی شکل کے ایک لطف عدد میں قبول ہو سکتے ہیں۔
 جملہ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ زیادہ عام شکل کے جملہ $1 + 2 + 3 + \dots + n$ میں شامل ہے لیکن اس پر بحث
 کرنے کا ایک اور طریقہ قابل توجہ ہے۔

دفعہ ۲۲۰ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر n کوئی حقیقی مقدار ہو تو

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مقدار $1 + 2 + 3 + \dots + n$ کی تعریف بھی حسب مساوات ذیل

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

جس میں لا اور ح حقیقی مقدار ہیں۔
 لطف اعداد کے نظریہ کی نشوونما پر شالک کی کتاب "سینڈنگ آف
 الجبرین انیٹیلے سس" کے ابواب ۱۰، ۱۱ میں مفصل بحث کی گئی ہے۔

۱۳۵- ایٹم ان طریقوں کی توضیح کے لئے جو مساواتوں کے نظریہ میں اور
 کئی مثالوں کے ثبات کرنے میں مفید ثابت ہو گئے چند مسائل اور امثلہ ذیل میں
 درج کرتے ہیں۔

۱۳۵- اگر n کسی منطقی صحیح تفاعل کو لا۔ ۱ پر تقسیم کیا جائے تو بتاؤ کہ باقی
 کیا بچے گی۔

فرض کرو کہ n (لا) لا کا کوئی منطقی صحیح تفاعل ہے، n (لا) کو لا۔ ۱ پر تقسیم
 کرو تا وقتیکہ ایسی باقی بچے جس میں لا شامل نہ ہو۔ فرض کرو کہ n خارج قسمت
 اور ب باقی ہے۔

$$n = (لا) = ق (لا - ۱) + ب$$

چونکہ ب میں لا شامل نہیں ہے اس لئے اس کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہ ہوگی
 خواہ ہم n کو کوئی قیمت دیں، لا = ۱ رکھو تب

$$n = (۱) = ق (۱ - ۱) + ب$$

اب لا کی محدود قیمتوں کے لئے ق کی قیمت محدود ہوتی ہے

اس لئے $ب = ف (۱)$

نتیجہ صریح - اگر $ف (۱)$ پورا تقسیم ہو جائے لا - ۱ پر تو $ب =$ یعنی $ف (۱) = ۱$ پس اگر لا کا ایک منطبق صحیح تعادل صفر ہو جائے جبکہ لا - ۱ تو یہ لا - ۱ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے -

۱۵ - دفعہ ۱۰ قبل کا مسئلہ اس قدر ضروری ہے کہ ہم اس کا ایک اور ثبوت ذیل میں درج کرتے ہیں، اس ثبوت میں، مزید فائدہ یہ ہے کہ اثباتی عمل میں خارج قسمت کی شکل بھی حاصل کی جاتی ہے -

فرض کرو کہ تعادل $ن$ ابعاد کا ہے اور

$$فبلا^۱ + فبلا^۲ + فبلا^۳ + \dots + فن$$

سے تعبیر ہوتا ہے، تب خارج قسمت $(ن - ۱)$ ابعاد کا تعادل ہوگا، اس کو

$$قبلا^۱ + قبلا^۲ + قبلا^۳ + \dots + قن$$

سے تعبیر کرو۔ اب اگر باقی جس میں لا شامل نہ ہو $ب$ ہو تو ظاہر ہے کہ

$$فبلا^۱ + فبلا^۲ + فبلا^۳ + \dots + فن$$

$$= (لا - ۱) (قبلا^۱ + قبلا^۲ + قبلا^۳ + \dots + قن) + ب$$

ضرب دینے اور لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$قب = فب$$

$$قب - ۱ قب = فب - ۱ قب یعنی قب = ۱ قب + قب$$

$$قب - ۱ قب = فب - ۱ قب یعنی قب = ۱ قب + قب$$

$$قب - ۱ قب = فب - ۱ قب یعنی قب = ۱ قب + قب$$

$$\text{ب۔ } ۱\text{ق۔} = \text{فن۔} \text{ یعنی ب۔ } = ۱\text{ق۔} + \text{فن۔}$$

اس سے ظاہر ہے کہ خارج قسمت کے متواتر سر اس طرح بنتے ہیں۔
خارج قسمت کی رقم ماقبل کے مرکب ۱ سے ضرب دو اور مقسوم میں
اگلی رقم کا جو سر ہے اس کو اس حاصل ضرب میں جمع کر دو۔ خارج قسمت
کی متواتر اقوم اور باقی کے بنانے کا عمل ذیل کی ترتیب سے واضح ہو سکتا
ہے۔

ق۱	ق۲	ق۳	ق۴	ق۵	ق۶
۱ق۱	۱ق۲	۱ق۳	۱ق۴	۱ق۵	۱ق۶
ق۱	ق۲	ق۳	ق۴	ق۵	ق۶

$$\text{پس ب۔ } = ۱\text{ق۔} + \text{فن۔} = ۱ (۱\text{ق۔} + ۲\text{ق۔} + \dots + \text{فن۔}) = \dots$$

$\text{ق۱} + \text{ق۲} + \text{ق۳} + \text{ق۴} + \text{ق۵} + \dots + \text{فن۔}$
اگر مقسوم علیہ ۱ + ۱ ہو تو بھی یہ طریقہ استعمال ہو سکتا ہے لیکن اس
صورت میں ضارب ۱ کی بجائے ۱ ہوگا۔
مثال۔ اگر ۳ لا۔ ۱ لا۔ ۳ لا۔ ۲ لا۔ ۱ لا۔ ۵ لا۔ ۲ لا۔ ۲ پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت
اور باقی معلوم کرو۔

یہاں ضارب ۲ ہے، لہذا

۳	۱	۰	۳۱	۰	۰	۲۱	۵
۶	۱۳	۲۸	۶	۱۲	۲۲	۶	
۳	۱۳	۳	۶	۱۲	۳	۱۱	

پس خارج قسمت ۳ لا۔ ۱ لا۔ ۱۳ لا۔ ۳ لا۔ ۶ لا۔ ۱۲ لا۔ ۳ ہے اور باقی ۱۱ ہے۔
۱۶ پیشق ماقبل میں اختصار کی خاطر مختلف اقوم کے صرف سر درج کئے گئے ہیں اور

لا کی جن قوتوں کی دقتیں موجود نہیں ان کے سروں کی بجائے صفر لکھے گئے ہیں منفر ۵۰
لکروں کے استعمال کا یہ طریقہ اکثر اوقات ابتدائی جبر یہ اعمال میں خاص طور پر جبکہ تفاعل
منطق صحیح ہوں بہت سی زحمت بچانے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے ذیل میں ایک
اور مثال درج کی جاتی ہے۔

$$\begin{array}{r} \text{مثال} - ۳ - لا - ۸ - لا - ۵ + لا - ۲۶ - لا - ۳۳ + لا + ۲۶ کو لا - ۲ - لا - ۴ + لا + ۸ پر تقسیم کرو۔ \\ \begin{array}{r} ۸ - ۴ + ۲ + ۱ \\ ۳ - ۸ - ۵ + ۲۶ + ۳۳ - ۲۶ + ۲ - ۳ \\ \hline ۲۴ - ۱۲ + ۶ + ۳ \\ ۳۳ - ۲ + ۴ + ۲ - \\ \hline ۱۶ + ۸ - ۴ - ۲ - \\ \hline ۲۶ + ۱۴ - ۶ - ۳ \\ ۲۴ - ۱۲ + ۶ + ۳ \\ \hline ۲ + ۵ - \end{array} \end{array}$$

پس خارج قسمت ۳ لا - ۲ لا + ۳ ہے اور باقی ۲ + ۵
یہ بات قابل غور ہے کہ مقسوم علیہ میں پہلی رقم کے سوائے باقی سب دقتوں کی مثالیں
ہل دی گئی ہیں، اس کا نتیجہ یہ ہوا ہے کہ عمل کی متواتر منزلوں پر ہم تفریق کے عمل کی
جگہ جمع کا عمل کر سکتے ہیں۔
۵۱۰ - ذیل کی ترتیب سے عمل اور بھی مختصر ہو جاتا ہے اس طریقہ کو ہارنر
کا ترکیبی تقسیم کا طریقہ کہتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} ۲۶ + ۳۳ - ۲۶ + ۵ - ۸ - ۳ \\ ۲۴ - ۱۲ + ۶ \\ ۱۶ + ۸ - ۴ - \\ ۲۴ - ۱۲ + ۶ + \\ \hline ۲ + ۵ - ۰ + ۳ + ۲ - ۳ \end{array}$$

[تشریح - انتصابی خطا کے دائیں طرف کے اعداد کا ستون مقسوم علیہ کے سروں پر
مشتمل ہے جن کی علامتوں کو سوائے پہلے سر کی علامت کے بدل دیا جاتا ہے۔ دوسری

اُنفی قطار بالترتیب ۱۴۱۲۔ ۸ کو ۳ سے جو خارج قسمت کی پہلی رقم ہے ضرب دینے سے حاصل کی جاتی ہے۔ پھر انتصابی خط کے بائیں طرف جو عددوں کا دوسرا ستون ہے اس کو جمع کرتے ہیں۔ اس سے ہیں ۲ ملتا ہے جو خارج قسمت کی دوسری رقم کا سر ہے پھر اس محصلہ عدد ۲ کو انتصابی خط کے دائیں طرف کے اعداد (۱۲۱۲ - ۸) سے ضرب دیکر تیسری اُنفی قطار حاصل کرتے ہیں ۱ اور تیسرے ستون کو جمع کرتے ہیں، جس سے ۳ حاصل ہوتا ہے جو خارج قسمت کی تیسری رقم کا سر ہے اور علیٰ ہذا القیاس ستونوں کو جمع کرنے سے ہیں باقی کی رقموں کے مر حاصل ہوتے ہیں]

مثال۔ ۱۶۱ + ۵۱۵ - ۸۱۵ - ۶۱۵ - ۲۱۵ - ۶۱۵ - ۲۱۵ - ۳۱۵ + ۳۱۵ - ۱۶۱

پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت کی چار رقمیں حاصل کرو۔

	4 -	4 -	1 -	0 + 4	2
		2 +	.	+ 9 -	3 -
	2 -	.	+ 4		.
1 -	.	+ 3			1
2 - . + . 1 2					
2 - . + 1 1 +	2 -	.	+ 1 -	2 - 3	

پس مطلوبہ خارج قسمت ۳ - ۲ و ب - ب^۱ - م^۱ و ب^۲ ہے اور باقی
ب^۵ - م^۵ و ب^۶ ہے۔

یہاں ہم مسلسل ستونوں کی رقوم کو حسب سابق جمع کرتے ہیں لیکن ہر ایک مجموعہ کو ۲ پر جو مقسوم علیہ کی پہلی رقم کا سر ہے تقسیم کرتے ہیں، جب خارج قسمت میں بقولہ کی مطلوبہ تعداد حاصل ہو جاتی ہے تو باقی ماندہ ستونوں کو محض جمع کرنے سے باقی حاصل ہو جاتی ہے، جہاں سو خر الذکر ستونوں کے حاصل جمع کو مقسوم علیہ کی پہلی رقم میں ۲ پر تقسیم نہیں کیا جاتا۔

طالب علم مفردہ سروس کے طریقہ سے تقسیم کا عمل کر کے اس نتیجہ کی آسانی سے تصدیق کر سکتا ہے۔

۵۱۸۔ دفعہ ۱۵۱ کا اصول جبریہ تہائیات کے ثابت کرنے میں نہایت

تفاعل اپنے متغیرات کے لحاظ سے متبادل کہلاتا ہے۔ مثلاً لا۔ ما اور
 وا (ب۔ ج) + ب (ج۔ ا) + ج (ا۔ ب)

متبادل تفاعل ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ کوئی خطی متبادل تفاعل ایسا نہیں ہو سکتا جس میں دو سے
 زیادہ متغیر ہوں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ کسی متشاکل تفاعل اور متبادل تفاعل
 کا حاصل ضرب ایک متبادل تفاعل ہوتا ہے۔

۵۲۔ متشاکل اور متبادل تفاعل صرف ایک رقم لکھنے اور اس رقم کے
 ماقبل علامت \times جو حاصل جمع کا اختصار ہے ثبت کرنے سے تعبیر کئے
 جا سکتے ہیں۔ مثلاً \times اسے مراد ان تمام رقوم کا حاصل جمع ہو جو اس کے
 نمونہ کی ہیں، \times اب سے مراد ان تمام رقوم کا حاصل جمع ہے جو اب
 کے نمونہ کی ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ مثلاً اگر تفاعل میں چار حروف (ا، ب، ج، د)
 ہوں تو

$$\times = ا + ب + ج + د$$

$$\times اب = اب + ا + د + ب + ج + د$$

علیٰ بن القیاس

اسی طرح سے اگر کسی تفاعل میں تین حروف (ا، ب، ج) ہوں تو
 \times (ب + ج) = (ب + ج) + (ج + ا) + ج (ا + ب)

اور \times (ا + ب + ج) = (ا + ب + ج) + ج (ا + ب) + ج (ا + ب)

یہ بات قابل توجہ ہے کہ جب حروف کی تعداد تین ہو تو \times اب
 تین رقوم پر نہیں بلکہ چھ رقوم پر مشتمل ہے، یعنی

$$\times اب = اب + ا + ج + ب + ا + ج + ج (ا + ب)$$

علامت \times حروف کے دو یا زیادہ جٹوں کے لحاظ سے جمع کے عمل کو تعبیر
 کرنے کے لئے بھی استعمال ہو سکتی ہے۔ مثلاً

$$\Sigma \text{ ب ج (ب-ج) } = \text{ (ب-ج) (ج-ا) (ا-ب) }$$

$$\Sigma \text{ ا (ب-ج) } = \text{ (ب-ج) (ج-ا) (ا-ب) }$$

$$\Sigma \text{ ا (ب-ج) } = \text{ (ب-ج) (ج-ا) (ا-ب) }$$

$$\Sigma \text{ ا (ب-ج) } = \text{ (ب-ج) (ج-ا) (ا-ب) (ا+ب+ج) }$$

$$\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ۳ \text{ا ب ج} = (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} - \text{ج})$$

آخری متانہ ذیل کی شکل میں بھی لکھی جاسکتی ہے:-

$$\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ۳ \text{ا ب ج} = \frac{1}{4} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ب} - \text{ج})^2 + (\text{ا} - \text{ب})^2$$

$$(\text{ب-ج})^3 + (\text{ج-ا})^3 + (\text{ا-ب})^3 = ۳(\text{ب-ج})(\text{ج-ا})(\text{ا-ب})$$

$$(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})^3 - ۳(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2) = ۳(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب}) (\text{ب} - \text{ج}) (\text{ا} - \text{ج})$$

$$\Sigma \text{ ب ج (ب+ج) } = ۲ \text{ا ب ج} = (\text{ب+ج})(\text{ج+ا})(\text{ا+ب})$$

$$\Sigma \text{ ا (ب+ج) } = ۲ \text{ا ب ج} = (\text{ب+ج})(\text{ج+ا})(\text{ا+ب})$$

$$(\text{ا+ب+ج})(\text{ب+ج+ا})(\text{ج+ا+ب}) = (\text{ب+ج})(\text{ج+ا})(\text{ا+ب})$$

$$۲ \text{ب}^2 \text{ج} + ۲ \text{ا}^2 \text{ج} + ۲ \text{ا} \text{ب}^2 - \text{ا}^2 \text{ب} - \text{ا} \text{ب}^2 - \text{ج}^2$$

$$= (\text{ا+ب+ج})(\text{ب+ج+ا})(\text{ج+ا+ب}) = (\text{ا+ب+ج})(\text{ب+ج+ا})(\text{ج+ا+ب})$$

امثلہ نمبری ۳۴ (ا)

۱۔ معلوم کرو کہ ۳ لا + ۱۱ لا + ۹۰ لا - ۱۹ لا + ۵۳ کو لا + ۵ پر تقسیم کرنے سے باقی کیا بچے گی۔

۲۔ بتاؤ کہ ۱ اور ۲ کس مساوات سے مربوط ہوں کہ ۲ لا^۱۔ ۱ لا^۱ + ۱ لا^۱ + ۱ ب

پورا تقسیم ہو جائے لا۔ ۳ پر۔

۳۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جب ۱ لا^۱۔ ۵ لا^۱ + ۱ لا^۱ + ۱ لا^۱۔ ۶ لا^۱

۱۶ لا^۱ + ۱۳ لا^۱۔ ۲ پر تقسیم کیا جائے۔

۴۔ اگر لا^۱۔ ۲ لا^۱۔ ۴ لا^۱ + ۱ لا^۱۔ ۱ لا^۱۔ ۳ لا^۱ + ۱۲ لا^۱ + ۱ کا ایک جزو ضربی لا^۱۔ ۵ لا^۱ + ۵ ہو تو ۱ کی قیمت معلوم کرو۔

۵۔ $\frac{۱}{۱ لا^۱ - ۵ لا^۱ + ۱ لا^۱ + ۸ لا^۱}$ کو لا کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں چار رقتوں

تک پھیلاؤ اور باقی معلوم کرو۔

جملات ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کرو:-

۶۔ ۱ (ب - ج) + ۲ (ج - ۱) + ۳ (ج - ۱) (ب - ۱)

۷۔ ۱ (ب - ج) + ۲ (ج - ۱) + ۳ (ج - ۱) (ب - ۱)

۸۔ ۱ (ب + ج) - ۲ (ب + ج - ۱) - ۳ (ج + ۱ - ب) - ۴ (ب + ج - ۱)

۹۔ ۱ (ب - ج) + ۲ (ج - ۱) + ۳ (ج - ۱) (ب - ۱) + ۸ (ب - ج)

۱۰۔ ۱ (ب - ج) + ۲ (ج - ۱) + ۳ (ج - ۱) (ب - ۱)

۱۱۔ (ب + ج + ۱) (ب - ۱) - ۲ (ب + ج - ۱) - ۳ (ج - ۱) - ۴ (ب - ۱)

۱۲۔ ۱ (ب + ج) - ۲ (ب + ج - ۱) - ۳ (ج + ۱) - ۴ (ج + ۱) (ب - ۱) + ۵ (ب - ۱) + ۶ (ج - ۱)

۱۳۔ ۱ (ب + ج) - ۲ (ب + ج - ۱) - ۳ (ج + ۱) - ۴ (ج + ۱) (ب - ۱) - ۵ (ب - ۱) + ۶ (ج - ۱)

۱۴۔ ۱ (ب - ج) + ۲ (ج - ۱) + ۳ (ج - ۱) (ب - ۱) + ۴ (ج - ۱) (ب - ۱)

ذیل کے متماثلات کو ثابت کرو۔

$$۱۵- \sum (ب+ج-۱)^۲ = ۳(ب+ج-۱)(۱+ج-۱)(۱+ب-۱) = ۳(ب+ج-۱)(ب+ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$۱۶- \frac{۱(ب-ج)(ج-۱)}{(ج-۱)(۱-ب)} + \frac{ب(ج-۱)(۱-ب)}{(ب-۱)(ج-۱)} + \frac{ج(ب-۱)(۱-ب)}{(۱-ج)(ب-۱)} = ۱+ب+ج$$

$$۱۷- \frac{۱^۲}{۱+ب} + \frac{ب^۲}{ب+ج} + \frac{ج^۲}{ج+۱} = \frac{(ب-۱)(ج-۱)(ب+ج)}{(ب+۱)(ج+۱)(ب+ج)} + ۳$$

$$۱۸- \sum (ب+ج-۱) = ۲(ب+ج-۱) = ۲(ب+ج-۱)(ب+ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$۱۹- \frac{۱(ب+ج)(ج+۱)}{(ب-۱)(ج-۱)} + \frac{ب(ج+۱)(۱+ب)}{(ج-۱)(ب-۱)} + \frac{ج(۱+ب)(ب+۱)}{(ج-۱)(ب-۱)} = ۲(ب+ج+۱)$$

$$۲۰- \sum (ب-ج-۱)^۲ = ۹(ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$۲۱- (۱+ا)(۱+ی)(۱+لا) = \sum (۱+ا+ی) + ۲(۱+ا+ی)(۱+ا+ی) + ۲(۱+ا+ی)(۱+ا+ی)$$

$$۲۲- \sum (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱) = \sum (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$۲۳- \sum (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱) = \sum (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$= (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$۲۴- \sum (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱) = \sum (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$\sum (ب-ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱) = ۰$$

$$۲۵- (ب+ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱) + (ب+ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱) + (ب+ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$= ۲(ب+ج-۱)(ج-۱)(ب+ج-۱)$$

$$۲۶- اگر ۱ = ب + ج - ۱، ۱ = ج + ب - ۱، ۱ = ب + ج - ۱$$

تو ثابتہ کرو کہ

(۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰) = ۵۵ (۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰)
 ۲۷- ثابت کرو کہ ۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰ کی قیمت میں کوئی فرق نہیں
 آتا اگر ہم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ بالترتیب سے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰
 رکھیں جہاں ۳ سے ۲ = (۱+۲+۳) (ج)
 جملات ذیل کی قیمتیں معلوم کرو:-

ج	ب	ا
$-۲۸ \frac{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}$		
$-۲۹ \frac{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}$		
$-۳۰ \frac{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}$		
$-۳۱ \frac{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}$		
$-۳۳ \frac{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)}$		
$(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)$		
$+ (۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)$		

متفرق تماثلات

۵۲۴- بہت سی تماثلات ا کے جذور الکعبوں کے خواص کے استعمال سے
 ہنسی آسانی سے ثابت کی جاسکتی ہیں۔ ان جذروں کو حسب معمول
 ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ سے تعبیر کیا جائیگا۔

مثال۔ ثابت کرو کہ

$$(لا + ا) - (لا - ا) = ا = لا + لا (لا + لا) (لا + لا + لا)$$

دائیں طرف کا جملہ ع معلوم ہو جاتا ہے اگر لا = ۱۰، لا + لا = ۲۰، لہذا لا (لا + لا) اس کا جزو ضربی ہے۔

لا = سہ ما رکھنے سے

$$ع = (لا + سہ) - (سہ - ا) = ا = لا + لا (لا + لا) (لا + لا + لا) = (سہ - سہ - ا) = لا = ا$$

پس ظاہر ہے کہ ع میں ایک جزو ضربی (لا - سہ) شامل ہے، اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اس میں لا - سہ ما بطور جزو ضربی شامل ہے، اس لئے

ع، (لا - سہ) (لا - سہ) پر تقسیم ہو سکتا ہے یعنی لا + لا + لا + لا + لا پر تقسیم ہو سکتا ہے۔

مزید ہاں چکر کے سات ابعاد کا جملہ ہے اور لا (لا + لا) (لا + لا + لا) (لا + لا + لا + لا)

پانچ ابعاد کا ہے اس لئے باقی جزو ضربی (لا + لا + لا) + ب لا کی شکل کا ہوگا۔ یعنی

$$(لا + لا) - (لا - ا) = ا = لا + لا (لا + لا) (لا + لا + لا) (لا + لا + لا + لا)$$

$$لا = ۱۱ = ۱۱ رکھنے سے ۲۱ = ۲ + ۱۹$$

$$لا = ۱۶ = ۱۱ رکھنے سے ۲۱ = ۱۵ + ۶$$

$$حل کرنے سے ۱ = ب = ۱$$

$$: (لا + لا) = (لا - ا) = ا = لا + لا (لا + لا) (لا + لا + لا)$$

۵۲۵۔ ابتدائی الجبرا سے ہم جانتے ہیں کہ

$$لا + ب + ج + ۳ = لا + ب + ج = (لا + ب + ج) (لا + ب + ج) (لا + ب + ج + ۱)$$

نیز دفعہ ۱۱۰ مشق ۳ کی روش سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$لا + ب + ج + ۳ = لا + ب + ج = (لا + ب + ج) (لا + ب + ج) (لا + ب + ج + ۱)$$

پس جملہ لا + ب + ج + ۳ = لا + ب + ج = (لا + ب + ج) (لا + ب + ج) (لا + ب + ج + ۱) میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

$$لا + ب + ج + ۳ = لا + ب + ج = (لا + ب + ج) (لا + ب + ج) (لا + ب + ج + ۱)$$

مثال۔ ثابت کرو کہ

۱ + ۲ ب + ج - ۳ اور لا + ۲ ما + ۳ ی - ۳ لا مای کے حاصل ضرب کو
 لا + ۲ ما + ۳ ی - ۳ لا مای کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے
 حاصل ضرب مذکور = (۱ + ب + ج) (۱ + سب + سبج) (۱ + سبب + سبجج)
 × (لا + ما + ی) (لا + سب + سبب) (لا + سبب + سببب)

ان چھ اجزائے ضربی میں سے دو دو کے زوج
 (۱ + ب + ج) (لا + ما + ی)

(۱ + سب + سبج) (لا + سبب + سببب) اور (۱ + سبب + سببب) (لا + سببب + سبببب)

لینے سے ہیں ذیل کے تین جزوی حاصل ضرب حاصل ہوتے ہیں :-

(لا + ما + ی) (لا + سب + سبب) (لا + سبب + سببب)

جہاں لا = لا + ب + ج + ی ، ما = ب + لا + ج + ما + ی

ی = ج + لا + ما + ب + ی

پس پورا حاصل ضرب = (لا + ما + ی) (لا + سب + سبب) (لا + سبب + سببب)

= لا + ۲ ما + ۳ ی - ۳ لا مای

۵۲۶۔ ان جملات کی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے جن میں متاویز 'ب'، 'ج'،

شامل ہوں جبکہ یہ متاویز مساوات ۱ + ب + ج = ۰ سے مربوط ہوں ہم

ذیل کے اندراجات سے کام لے سکتے ہیں :-

۱ = ہ + ک ، ب = سہ + سہک ، ج = سہہ + سہک

لیکن اگر ۱، ب اور ج متشکل طور پر شامل ہوں تو ذیل کی مثال کا طریقہ

قابل ترجیح ہوتا ہے :-

اگر ۱ + ب + ج = ۰ تو ثابت کرو کہ

۱ (۱ + ب + ج) = ۵ (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج) (۱ + ب + ج)

یہ مساوات متماثل درست ہے (۱ + لا) (۱ + ب لا) (۱ + ج لا)

$$= ۱ + ف + لا + ق + لا + ر لا$$

جہاں ف = ۱ + ب + ج ، ق = ۱ + ب + ج + و ، ر = ۱ + ب + ج
پس شرط مفروضہ یعنی ۱ + ب + ج = ۰ کو استعمال کرنے سے

$$(۱ + لا)(۱ + ب + لا) = (۱ + ج + لا) = ۱ + ق + لا + ر لا$$

دونوں جانب لوکار تم لینے اور لان کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\frac{(۱ - لا)(۱ - ب - ج)}{ن} = لا + کا سر لوک (۱ + ق + لا + ر لا) کی تفصیل میں$$

$$= لا + کا سر [(۱ + لا + ر لا) - \frac{۱}{۲}(۱ + ق + لا + ر لا) + \frac{۱}{۳}(۱ + ق + لا + ر لا) - \dots] میں$$

ن = ۱، ۲، ۳ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$- \frac{۱ + ب + ج}{۲} = ق = \frac{۱ + ب + ج}{۳} = ر = \frac{۱ + ب + ج}{۵} = - ق ر$$

$$جس سے \frac{۱ + ب + ج}{۵} = \frac{۱ + ب + ج}{۳} \times \frac{۱ + ب + ج}{۲}$$

اور مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

اگر ۱ = ب - ج + ب = ج - ع + ج = ع - ع - ب تو شرط مذکورہ بالا پوری ہوتی ہے۔

پس ع + ب اور جہ کی تمام قیمتوں کے لئے ذیل کی مساوات متماثل طور پر صحیح ہے۔

$$\{ (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ب) \}$$

$$= \{ (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ب) \} + \{ (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ب) \}$$

$$یعنی (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ب) = (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ب)$$

$$(ع + ب + ج - ب - ج - ع)$$

دفعہ ۵۲۲ مشق ۳ سے مقابلہ کرو۔

امثلہ ۳۴ (ب)

- ۱۔ اگر $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ثابت کرو کہ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ اگر $ا$ کوئی طاق مثبت صحیح عدد ہو جو ۳ کا کوئی ضعف نہ ہو تو $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۴۔ ثابت کرو کہ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۵۔ اس جملہ کی قیمت معلوم کرو۔
 $(ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج)$
 $(ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج) + (ب + ج)(ا + ب + ج)$
- ۶۔ ثابت کرو کہ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۷۔ ثابت کرو کہ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۸۔ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۹۔ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔
- ۱۰۔ $(ا + ب + ج)^۳ = ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج) + ۳(ا + ب)(ا + ج)(ب + ج)$ ۔

اگر $ا + ب + ج = ۰$ - تو سوالات ۱۱ تا ۱۷ کی مشاغل ثابت کرو۔

$$۱۱ - ۲(ا^۲ + ب^۲ + ج^۲) = (ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۲ - ۵(ا^۵ + ب^۵ + ج^۵) = ۵(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)$$

$$۱۳ - ۱(ا + ب + ج)^۶ = ۳(ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۴ - ۳(ا + ب + ج)^۳(ا + ب + ج)^۳(ا + ب + ج)^۳ = ۵(ا + ب + ج)^۳(ا + ب + ج)^۳(ا + ب + ج)^۳$$

$$۱۵ - \frac{ا^۴ + ب^۴ + ج^۴}{۴} = \frac{ا^۵ + ب^۵ + ج^۵}{۵} \times \frac{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲}{۲}$$

$$۱۶ - \left(\frac{ا - ب}{ج} + \frac{ب - ج}{ا} + \frac{ج - ا}{ب} \right) \left(\frac{ا - ب}{ج} + \frac{ب - ج}{ا} + \frac{ج - ا}{ب} \right) = ۹$$

$$۱۷ - (ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲ = ۳(ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲$$

$$= (ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲(ا + ب + ج)^۲$$

$$۱۸ - ۲۵\{ا(ب - ج) + ب(ج - ا) + ج(ا - ب)\} = \{ا(ب - ج) + ب(ج - ا) + ج(ا - B)\}^۲$$

$$۲۱ = \{ا(ب - ج) + ب(ج - ا) + ج(ا - ب)\}^۲$$

$$۱۹ - \{ا(ب - ج) + ب(ج - ا) + ج(ا - ب)\}^۳ = ۳(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)$$

$$= ۲(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)$$

$$۲۰ - (ا - ب)(ب - ج)(ج - ا) + (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب) + (ج - ا)(ا - ب)(ب - ج) = ۰$$

$$= ۲(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)$$

$$۲۱ - (ا - ب)(ب - ج)(ج - ا) + (ب - ج)(ج - ا)(ا - ب) + (ج - ا)(ا - ب)(ب - ج) = ۰$$

$$= ۲(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)(ا + ب + ج)$$

$$۲۲ - اگر ا + ب + ج = ۰ - اور لا + ما + می = ۰ - تو ثابت کرو کہ$$

ذیل کی مثال میں جو اصول تمثیلاً بیان کیا گیا ہے اُس کو ایسے درجے پر لایا گیا تھا۔

مثال - ذیل کی مساواتوں میں سے لا کو ساقط کرو

$$\text{اولاً } \text{ب لا} + \text{ج لا} + \text{د} = \text{و} ، \text{ف لا} + \text{گ لا} + \text{ھ} = \text{و} .$$

فرض کرو کہ

دونوں مساواتوں کی مشترک اصل کے جواب میں جزو ضربی لا + ک ہے اور فرض کرو کہ

$$\text{اولاً } \text{ب لا} + \text{ج لا} + \text{د} = (\text{لا} + \text{ک}) (\text{اولاً } \text{ل لا} + \text{م})$$

$$\text{اور } \text{ف لا} + \text{گ لا} + \text{ھ} = (\text{لا} + \text{ک}) (\text{ف لا} + \text{ن})$$

جہاں ک، ل، م، ن، ہاں معلوم مقادیر ہیں۔
ان مساواتوں سے متماثل طور پر

$$(\text{اولاً } \text{ب لا} + \text{ج لا} + \text{د}) (\text{ف لا} + \text{ن}) = (\text{اولاً } \text{ل لا} + \text{م}) (\text{ف لا} + \text{گ لا} + \text{ھ})$$

لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ف لا} - \text{ون} + \text{وگ} - \text{ب ف} = \text{و}$$

$$\text{گ ل} + \text{ف م} - \text{ب ن} + \text{اھ} - \text{ج ف} = \text{و}$$

$$\text{ھ ل} + \text{گ م} - \text{ج ن} - \text{د ف} = \text{و}$$

$$\text{ھ م} - \text{د ن} = \text{و}$$

ان مساواتوں میں سے ل، م، ن کو ساقط کرنے سے ذیل کا مقطع حاصل ہوتا ہے

ف	-	ا	وگ	-	ب	ف
گ	ف	ب	اھ	-	ج	ف
ھ	گ	ج	-	د	ف	
ھ	م	-	د	ن		

۵۳۔ معادلات $f = 0$ اور $g = 0$ کا حاصل استقاط سل وسمٹر (Sylvester) کے افتراتی طریقہ استقاط سے ایک مقطعہ کی شکل میں آسانی معلوم ہو سکتا ہے۔ ہم گزشتہ مثال ہی کو حل کریں گے۔

مثال۔ مساوات $f = 0$ اور $g = 0$

ف $f = 0$ اور $g = 0$

میں سے لا کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو لا سے اور دوسری مساوات کو بالترتیب لا اور لا سے ضرب دو۔ اس طرح سے ہم پانچ مساواتیں حاصل ہونگی جن میں سے ہم چار مقادیر لا، لا، لا اور لا کو ساقط کر سکتے ہیں جن کو مختلف متغیر خیال کیا جاسکتا ہے۔ یہ مساواتیں حسب ذیل ہیں:-

$$f = 0 \text{ اور } g = 0$$

$$f = 0 \text{ اور } g = 0$$

$$f = 0 \text{ اور } g = 0$$

$$f = 0 \text{ اور } g = 0$$

$$f = 0 \text{ اور } g = 0$$

پس حاصل استقاط مطلوبہ یہ ہے:-

$$= \begin{vmatrix} f & g & f' & g' \\ f & g & f' & g' \\ f & g & f' & g' \\ f & g & f' & g' \end{vmatrix}$$

۵۳۱۔ ذیل میں جو طریقہ مندرج کیا گیا ہے اسکا اصول بیزاؤٹ (Bezout) نے دریافت کیا تھا۔ اس طریقہ سے ہم حاصل استقاط کو گزشتہ طریقوں کی نسبت مقابلہ چھوٹے درجہ کے مقطعہ میں ظاہر کر سکتے ہیں، اس لحاظ سے یہ طریقہ گزشتہ دفعہ کے دونوں طریقوں پر فوقیت رکھتا

ہے، ہم پھر وہی مثال لینگے جو پہلے حل کی گئی تھی۔ اور علی اسقاط کے لئے کوئی کا طریق عمل درج کریں گے۔

مثال۔ مساوات $۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰ = ۰$

اور $۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰ = ۰$

میں سے لا کو ساقط کرو۔

$$\frac{۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰}{۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰} = \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰}{۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰} = \frac{۱}{۱}$$

جس سے (اگ - ب ف) (لا + ۱۰۱ - ج ف) (لا - د ف) = ۰

اور (۱۰۱ - ج ف) (لا + ۱۰۲ - ب ف) (ج گ - د ف) (لا - د گ) = ۰

ان دووں مساواتوں کو $۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰ = ۰$ کے ساتھ ملانے سے اور لا اور لا کو مختلف متغیر خیال کرنے سے

$$\begin{array}{c} \text{ف} \quad \text{گ} \quad \text{ه} \\ \left| \begin{array}{l} \text{اگ - ب ف} \quad \text{۱۰۱ - ج ف} \quad \text{د ف} \\ \text{۱۰۱ - ج ف} \quad \text{ب ف - ج گ} \quad \text{د گ} \end{array} \right| = ۰ \end{array}$$

۵۳۲۔ اگر ہمارے پاس دو مساواتیں فہ (لا، ما) = ۰ اور فہ (لا، ما) = ۰ کی شکل کی ہوں تو ہم ان کو گزشتہ طریقوں میں سے کسی ایک طریقہ سے ساقط کر سکتے ہیں۔ اس صورت میں حاصل اسقاط لا کا ایک تفاعل ہوگا۔

اگر ہمارے پاس تین مساواتیں ان شکلوں

$$\text{فہ (لا، ما، ی)} = ۰, \text{فہ (لا، ما، ی)} = ۰, \text{فہ (لا، ما، ی)} = ۰$$

کی ہوں تو پہلی اور دوسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے اور پھر دوسری اور تیسری مساواتوں سے ی کو ساقط کرنے سے یہیں دو مساواتیں

اس شکل

سب (لا، ما) = اور سب (لا، ما) =
 کی ملتی ہیں۔ اگر ہم ان مساواتوں سے ما کو ساقط کریں تو ہمیں ایک حاصل
 ف (لا) = کی شکل کا ملے گا۔
 اس قسم کے استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ہم $n + 1$
 مساواتوں میں سے n متغیروں کو ساقط کر سکتے ہیں۔
 ۳۳۔ عمل اسقاط کے متعلق جو عام طریقے اوپر بیان ہوئے ان سے اکثر
 اوقات استفادہ کیا جاسکتا ہے۔ لیکن اس طرح سے جو حاصل اسقاط ملینگے
 وہ شاید زیادہ ہی سادہ ترین شکل میں ہونگے۔ اکثر اوقات مساواتوں کو
 دیکھنے سے ہی خود بخود اسقاط کے کسی خاص طریقہ کا پتا چل جاتا ہے
 اس کی تشریح ذیل میں کی جاتی ہے۔
 مثال ۱۔ ذیل کی مساواتوں

$$ل + لا + م = ا، م - لا - ل = ما، ب + ل = م = ا$$

سے ل اور م کو ساقط کر دو۔
 پہلی دو مساواتوں کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$ل + لا + م = ا، لا + م = ا، لا + ما = ا + ب$$

$$\text{یعنی } (ل + م) (لا + ما) = ا + ب$$

$$\text{پس حاصل اسقاط مطلوبہ } لا + ما = ا + ب$$

اگر ل = جم ط اور م = بب ط تو تیسری مساوات متماثل طور پر پوری ہوگی

$$\text{یعنی لاجم ط + ما بب ط = لا لیب ط - ما جم ط = ب کا حاصل اسقاط}$$

$$لا + ما = ا + ب$$

مثال ۲۔ مساوات $ا + م = لا + م$ ، $ب + ل = لا + م$ ، $ا + ج = لا + م$

سے لا، ما، ی ساقط کر دو۔

ان مساواتوں سے $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ، $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ، $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ج

ان تینوں مساواتوں کو ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\text{پس } 2 + (1 - \frac{1}{a}) + (1 - \frac{1}{b}) + (1 - \frac{1}{c}) + (1 - \frac{1}{d}) = 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

مثال ۳۔ معادلات $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ، $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ، $\frac{1}{c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$ سے

سے $\frac{1}{a}$ کو ساقط کرو۔

پہلی مساوات کو $\frac{1}{b}$ سے اور دوسری کو $\frac{1}{c}$ سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

اس لئے تیسری مساوات سے

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

اسی طرح سے $\frac{1}{c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$

$$\text{پس } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ اور } \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\therefore (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + (\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = (\frac{1}{c} + \frac{1}{d}) + (\frac{1}{c} + \frac{1}{d})$$

$$2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\therefore (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + (\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = (\frac{1}{c} + \frac{1}{d}) + (\frac{1}{c} + \frac{1}{d})$$

مثال ۴۔ معادلات $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ، $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ، $\frac{1}{c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$ سے

$\frac{1}{a}$ کو ساقط کرو۔

$$\frac{(لا - ما) + (ما - ی) + (ی - لا)}{لا ما ی} = لا + ب + ج$$

$$\frac{(ما - ی)(ی - لا)(لا - ما)}{لا ما ی} =$$

اگر ہم لا کی علامت بدلیں تو ب اور ج کی علامتیں بدل جاتی ہیں لیکن لا کی علامت نہیں بدلتی۔

$$\frac{(ما - ی)(ی + لا)(لا + ما)}{لا ما ی} = پس - ب - ج$$

$$\frac{(ما + ی)(ی - لا)(لا + ما)}{لا ما ی} = اسی طرح سے ب - ج - ا$$

$$\frac{(ما + ی)(ی + لا)(لا - ما)}{لا ما ی} = اور ج - ا - ب$$

$$\frac{(ا + ب + ج)(ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا - ب + ج)}{لا ما ی} =$$

$$= \left(\frac{ما}{لا} - \frac{ی}{لا} \right) \left(\frac{ی}{لا} - \frac{لا}{ما} \right) \left(\frac{لا}{ما} - \frac{ا}{ب} \right) \left(\frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ا} \right) =$$

مثلاً ۳۴ (ج)

۱۔ معادلات $م^۲ - لا - م + ا = ۰$ ، $م + ما + لا = ۰$ سے م کو سا قطہ کرو۔

۲۔ معادلات $م^۲ - لا - م + ا = ۰$ ، $ن - لا - ن + ا = ۰$ سے م اور ن کو سا قطہ کرو۔

۳۔ معادلات $م - لا - ن + ا = ۰$ ، $ن - لا - م + ا = ۰$ سے م اور ن کو سا قطہ کرو۔

۴۔ معادلات $ف + ق + ر = ۱$ اور $(ف + ق) + ر = ۲$ سے $۱ = ۲ - ۱$

$$ف + ق = ۱ \quad ، \quad ق = ۱ - ۱ = ۰$$

میں سے $ف$ ، $ق$ کو ساقط کرو۔

۵۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۰$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۰$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

۶۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $(۱ + م) = ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $(۱ + م) = ۱$ میں سے $م$ کو ساقط کرو۔

۷۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

۸۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $(ف - ق) = ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $(ف - ق) = ۱$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

۹۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

۱۰۔ مساوات $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

۱۱۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

۱۲۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

۱۳۔ معادلات $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ سے $۱ = ۲ - ۱$ اور $۱ = ۲ - ۱$ میں سے ۱ کو ساقط کرو۔

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \quad ، \quad \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \quad ، \quad \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱}$$

$$ج = \left(\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} \right)$$

۱۳۔ مساوات ذیل میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

$$\frac{(لا^۲ + ما^۲ - ی^۲)}{۲} = \frac{لا(ی + لا)}{ب} = \frac{ی(لا + ما)}{ج} = \frac{لا(ما - ی)}{۲} = ۱$$

۱۵۔ مساوات ۴ (لا + ما) = لا + ب ما، ۲ (لا - ما) = لا - ب ما، لا ما = ج^۲ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۶۔ مساوات ذیل میں لا، ما، ی کو ساقط کرو

$$\begin{aligned} (ما + ی)^۲ &= ۴ لا ما، (ی + لا)^۲ = ۴ ب ما، (لا + ما)^۲ = ۴ ج لا \\ ۱۷۔ معادلات ذیل (لا + ما - ی) (لا - ما + ی) &= لا ما، (ما + ی - لا) (لا - ما - ی) = لا ما \\ (ما - ی + لا) (ب + ی) &= لا، (ی + لا - ما) (ج - ی) = ج لا، لا ما = ج لا ما میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔ \end{aligned}$$

۱۸۔ معادلات ذیل لا، ما = لا (لا + ما) = ب، ۲ لا + ما = ج میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ لا + ب ما + ج ی = لا + ب + ج ی + ی + لا + ما = ۰ کا حاصل استقاط (لا + ب + ج) (ب + ج) (ج + لا) (لا + ب) + (لا + ب + ج) (ج + لا) (لا + ب) = ۰ ہے۔

۲۰۔ معادلات لا + ب ما = لا، لا - ب ما = ج میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ لا + ما = ب ج، ب ما + ی = لا، ج ی + لا = لا + ما = ب اور

لا ی = ب ج کا حاصل استقاط ب ج + ج لا + لا ب = ۵ و ب ج = ۵

$$۲۲۔ لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = لا + ما + ی = ۱ اور \frac{لا}{لا - ف} = \frac{ب}{ب - ق} = (ما - ق) =$$

ج (ی - ر) سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔

۲۳۔ بیژاؤٹ (Bezout) کے طریقہ کو استعمال کر کے معادلات

لا + ب لا + ج لا + ما = ۰ اور لا + ب لا + ج لا + ما = ۰ میں سے لا، ما کو ساقط کرو۔

پیشینہ مساواتوں کا باب

نظریہ مساوات

۵۳۴۔ باب ہفتم میں ہم مساوات درجہ دوم کے سروں اور اصولوں کے چند باہمی روابط ثابت کر چکے ہیں۔ یہاں ہم پہلے ن ویں درجہ کی مساواتوں کی صورت میں اسی قسم کے روابط معلوم کرینگے اور پھر مساواتوں کے عام نظریہ کے چند ابتدائی خواص پر بحث کرینگے۔

۵۳۵۔ فرض کرو کہ f_n ، f_{n-1} ، f_{n-2} ، + f_1 ، f_0 ، f_{-1} ، f_{-2} ، لا کا ایک ن ابعاد کا منطق صحیح تفاعل ہے، اس کو ف (لا) سے تعبیر کرو، تب ف (لا) = ۰۔ ویں درجہ کی منطق صحیح مساوات کا ایک عام نمونہ ہے۔ اس کی سب رقموں کو فہ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ عمومیت میں کسی طرح ہارج ہونے بغیر مساوات

$$f_n + f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_1 + f_0 = f_{-1}$$

کو کسی درجہ کی ایک منطق صحیح مساوات کے نمونہ کے طور پر لیا جاسکتا ہے۔ اگر اس کے برعکس نہ بیان کیا گیا ہو تو سروں f_n ، f_{n-1} ، f_{n-2} ، فہ کو ہمیشہ منطق تصور کیا جائیگا۔ ۵۳۶۔ لا کی کوئی قیمت جس سے ف (لا) صفر ہو جائے مساوات ف (لا) = ۰ کی اصل کہلاتی ہے۔

دفعہ ۵۱۴ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ جب ف (لا) کو لا۔ ۱ پر تقسیم کیا جائے تو باقی ف (۱) بنتی ہے، پس اگر ف (لا) لا۔ ۱ پر پورا تقسیم ہو جائے اور باقی کچھ نہ بچے تو مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل لا ہوگی۔ ۵۳۷۔ ہم یہاں یہ تسلیم کر لیں گے کہ ف (لا) = ۰ کی شکل کی ہر ایک مساوات کی ایک اصل ضرور ہے۔ خود یہ اصل حقیقی ہو یا خیالی۔ اس مسئلہ کا ثبوت نظریہ

سب اجزائے ضربی میں سے کوئی بھی صفر نہیں ہوگا اور اس لئے لا کی اس قیمت کے لئے ف (لا) صفر نہیں ہوگا۔

اوپر کی تحقیقات میں ممکن ہے کہ مقادیر $1^1, 1^2, 1^3, \dots, 1^n$ میں سے بعض باہم مساوی ہوں، تاہم اس صورت میں بھی ہم بھی سمجھیں گے کہ مساوات کی اصلیں ہیں اگرچہ یہ سب اصلیں مختلف نہیں ہیں۔

۵۳۹۔ کسی مساوات کی اصلوں دوسروں کے باہمی روابط کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ مساوات $1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n$ ۔

ہے اور اس کی اصلیں $1^1, 1^2, 1^3, \dots, 1^n$ ہیں تب ہمیں متماثل طور پر چاہئے:

$1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n$ (ایک)

پس دفعہ ۵۴۰ احصاء اول کی ترقیم کے موافق

$1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n$

$1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n = 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n$

(۱۰۰) ص

اس مساوات متماثلہ میں لا کی یکساں قوتوں کے سروں کو مساوی کرنے سے

- $1^1 = 1^1$ = اصلوں کا مجموعہ

- $1^2 = 1^2$ = اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ و دوا اصلوں کو اکٹھا لینے سے

- $1^3 = 1^3$ = اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تین تین اصلوں کو اکٹھا لینے سے

.....

(۱۰۱) $1^n = 1^n$ = اصلوں کو متماثل ضرب

اگر 1^n کو نہ قید ہو تو ہر ایک 1^n پر قیہم کرے سے مساوات

بالا ہو جائی ہے:

$$(لا^۳ + فہ^۳ لا^۲ + فہ^۲ لا - فہ) = ۰$$

$$یا (لا^۳ + فہ^۲ لا) - (فہ^۲ لا^۲ + فہ) = ۰$$

$$یا لا^۳ + (۲ فہ - فہ^۲) لا^۲ + (فہ^۲ - ۲ فہ فہ) لا - فہ^۲ = ۰$$

اور اگر ہم لا کی بجائے ما رکھیں تو

$$ما^۳ + (۲ فہ - فہ^۲) ما^۲ + (فہ^۲ - ۲ فہ فہ) ما - فہ^۲ = ۰$$

۵۴۔ شاید طالب علم یہ خیال کرے کہ دفعہ قبل کے روابط ہر مفروضہ مساوات کے حل کرنے میں مدد دے سکتے ہیں کیونکہ روابط کی تعداد اصولوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ دراصل ایسا نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہلے مقادیر ا، ب، ج، تک میں سے ن-۱ مقادیر کو سا قط کرتے ہیں اور اس طرح سے باقی ماندہ ایک مقدار کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ایک مساوات حاصل کرتے ہیں۔ تب چونکہ یہ مقادیر ہر مساوات میں متماثل طور پر شامل ہوتی ہیں، اس لئے ظاہر ہے کہ محصلہ مساوات میں ہر صورت میں سرورھی ہونگے۔

اس لئے یہ مساوات دراصل ابتدائی مساوات ہی ہوگی جبکہ اصولوں ا، ب، ج، تک میں سے کسی ایک اصل کو لا کی بجائے لکھا جائے ہم مثال کے طور پر مساوات ذیل پر غور کرتے ہیں:-

$$لا^۳ + فہ لا^۲ + فہ لا + فہ = ۰$$

فرض کرو کہ اس کی اصلیں ا، ب، ج، ہیں، تب

$$ا + ب + ج = - فہ$$

$$ا ب + ا ج + ب ج = - فہ$$

$$ا ب ج = - فہ$$

ان مساواتوں کو بالترتیب (۱)، (۲)، (۳) سے ضرب دو اور جمع کرو۔

$$\text{تب } ۱ = ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۸ - ۹ - ۱۰$$

$$\text{یعنی } ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۵۵$$

اور یہ ابتدائی مساوات ہی ہے جس میں لاکھ بچائے اور لکھا گیا ہے۔ اسقاط کا مندرجہ بالا طریقہ بالکل عام ہے اور ہر درجہ کی مساوات پر اس کا اطلاق ہو سکتا ہے۔

۵۴۔ اگر ایک مساوات کی دو یا زیادہ اصلیں کسی مخصوص ربط کے ذریعہ مربوط ہوں تو دفعہ ۵۳ کے خواص کی مدد سے ہم بعض اوقات مکمل حل معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات ۴ لا - ۲ لا + ۲ لا + ۲ لا + ۱ لا = ۱۸ کے حل معلوم کر چکیں اس کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔

اصلوں کو ۱۔ ب ۱، ۲۔ ب ۱ + ۲ سے تعبیر کرو، تب اصلوں کا مجموعہ ۳ ہے، اصلوں کا حاصل ضرب دو اصلوں کو اکٹھا لینے سے ۳ - ۱ - ۲ ہے اور اصلوں کا حاصل ضرب ۱ (۱ - ۲) ہے پس ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

$$۳ = ۱ + ۲ ، ۳ - ۱ - ۲ = ۰ ، ۱ (۱ - ۲) = ۰$$

پہلی مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ۳ = ۱ + ۲ ، دوسری سے ۱ - ۲ = ۰ اور چونکہ یہ تین تیسری مساوات کو پورا کرتی ہیں اس لئے یہ مساواتیں باہم مطابق ہیں پس مطلوبہ اصلیں ۱، ۲، ۳ ہیں۔

مثال ۲۔ مساوات ۲ لا - ۴ لا - ۴ لا + ۴ لا + ۴ لا = ۴۵ کے حل کر چکیں اس کی ایک اصل دوسری سے دو چند ہو۔

اصلوں کو ۱۔ ب ۱، ۲۔ ب ۱ + ۲ سے تعبیر کرو، تب ظاہر ہے کہ

$$۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ ، ۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ ، ۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵$$

پہلی دو مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے:-

$$۸ - ۲ - ۱ - ۳ = ۰$$

$$۱ = \frac{۳}{۳} - \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳} \text{ اور } ۲ = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۳}$$

اگر ہمیشہ سے معلوم ہو گا کہ قیمتیں ۱ = - $\frac{۱}{۳}$ ، ۲ = $\frac{۲}{۳}$ ، تیسری مساوات ۲ = $\frac{۲}{۳}$ - $\frac{۱}{۳}$ کو پورا نہیں کریں، اس لئے ہمارے پاس صرف یہ دو قیمتیں

$$۱ = \frac{۳}{۳} \text{ اور } ۲ = \frac{۲}{۳}$$

رہ جاتی ہیں۔ لہذا مطلوبہ اصلیں $\frac{۳}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۱}{۳}$ ہیں۔

۵۴۲۔ اگرچہ یہ ممکن ہے کہ ہم دفعہ ۵۳۹ کے روابط سے کسی مساوات کی اصلیں معلوم نہ کر سکیں لیکن ہم ان روابط کو اصلوں کے متشکل تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساوات ۱۰۲ + ۱۰۱ + ۱۰۰ = ۰ کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں ۱، ۲ اور ۳ ہیں، تب

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

نیز مساوات مفروضہ میں لا کی بجائے بالترتیب ۱، ۲، ۳ لکھئے اور جمع کرنے سے

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

مثال ۲۔ اگر مساوات ۱۰۲ + ۱۰۱ + ۱۰۰ = ۰ کی اصلیں ۱، ۲، ۳

ج ۱ ہوں تو ۱۰۲ کی قیمت معلوم کرو

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۰ \text{ اور } ۱ + ۲ + ۳ = ۰$$

۱۰۲ مساواتوں سے - ۱۰۲ = ۱۰۲ - ۱۰۲ (۱۰۲ + ۱۰۱ + ۱۰۰ = ۰)

کی قیمتیں معلوم کرو۔

۱۹۔ اگر a, b, c مساوات $la + c = r$ کی اصلیں ہوں تو

$$(1) (b - c) + (c - a) + (a - b) = (2) (b + c) + (c + a) + (a + b)$$

۲۰۔ مساوات $la + c = r$ کی اصلوں کے مربعوں اور مکعبوں کے حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۱۔ مساوات $la + c = r$ کی اصلوں کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۲۔ حقیقی سروں والی مساوات میں خیالی اصلوں کے زوج واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ $f(la) = 0$ حقیقی سروں والی ایک مساوات ہے اور اس کی ایک خیالی اصل $a + bx$ ہے، ہم ثابت کریں گے کہ $a - bx$ بھی اس کی ایک اصل ہوگی۔

ان دو اصلوں کے متناظر (la) کا جزو ضربی یہ ہے:-

$$(la - a - bx)(la - a + bx) \text{ یا } (la - a)^2 + b^2$$

$f(la)$ کو $(la - a)^2 + b^2$ پر تقسیم کرو اور فرض کرو کہ خارج قسمت q ہے اور باقی (اگر کوئی ہے تو) $b + la$ ہے

$$b + f(la) = q(la - a)^2 + b^2 + b + la$$

اس مساوات میں $la = a + bx$ رکھو، تب $f(la)$ حسب

معطیات معدوم ہو جاتا ہے، نیز $(la - a)^2 + b^2 = 0$ اسلئے $b + a + bx = 0$ حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی کرنے سے

$$b + a = 0 \text{ اور } b + bx = 0$$

لیکن معطیات کی رو سے b صفر نہیں ہے

ب = . اور ب = .

پس ف (لا) پورا تقسیم ہو جاتا ہے (لا - ا) + ب پر یعنی
(لا - ا - خ ب) (لا - ا + خ ب) پر

لہذا لا = ا - خ ب بھی ایک اصل ہے۔

۵۴۴ - دفعہ ما قبل میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر مساوات ف (لا) = . کی
دو خیالی اصلیں لا ± خ ب ہوں تو (لا - ا) + ب اصل ف (لا) کا ایک
جزو ضربی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ لا ± خ ب، ج ± خ د، ع ± خ گ، مساوات
ف (لا) = . کی خیالی اصلیں ہیں اور ان خیالی اصلوں کے متناظر درجہ دوم
کے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب فہ (لا) ہے، تب

فہ (لا) = (لا - ا) + ب { (لا - ج) + د } { (لا - ع) + گ } { }

اب لا کی ہر حقیقی قیمت کے لئے ان اجزائے ضربی میں سے ہر ایک جزو
ضربی مثبت ہے، پس لا کی حقیقی قیمتوں کے لئے فہ (لا) ہمیشہ مثبت ہے۔
۵۴۵ - دفعہ ۵۴۳ کی مانند ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ منطق سروں کی کسی
مساوات میں ا صم اصلوں کے زوج واقع ہوتے ہیں یعنی اگر لا + ما ب
ایک اصل ہو تو لا - ما ب بھی ایک اصل ہوگی۔

مثال ۱ - مساوات لا - ۱۱ - لا - ۳ - لا - ۳ = . کی ایک اصل ۳ + لا
ہے، مساوات کو حل کرو۔

چونکہ ۳ + لا ایک اصل ہے اس لئے ۳ + لا بھی ایک اصل ہوگی اور اسلئے
اس زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی لا - ۳ + لا + ۱ ہے۔

نیز لا - ۱۱ - لا - ۳ - لا - ۳ = (لا - ۳ + لا + ۱) (لا - ۱۱ + لا + ۳)

پس باقی اصلیں مساوات

$$لا - ۱۱ + لا + ۳ = ۰ \quad یا \quad (لا - ۳ + لا + ۱) (لا - ۱۱ + لا + ۳) = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔ لہذا مطلوبہ اصلیں یہ ہیں۔

$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, (2 + \sqrt{3}), (2 - \sqrt{3})$$

مثال ۲۔ منطبق سروں کی ایک مساوات درجہ چہارم بناؤ جس کی ایک اصل $\sqrt{3} + 2$ ہو۔
 $\sqrt{3} - 2$ ہو۔ ملاحظہ رہے کہ اصلوں کا ایک زوج $\sqrt{3} + 2$ اور $\sqrt{3} - 2$ ہوگا اور دوسرا زوج $-\sqrt{3} + 2$ اور $-\sqrt{3} - 2$ ہوگا۔

پہلے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی لا^۱ $2 + \sqrt{3}$ لا^۲ 5 اور دوسرے زوج کے متناظر درجہ دوم کا ایک جزو ضربی لا^۱ $2 + \sqrt{3}$ لا^۲ 5 ہے پس مطلوبہ مساوات یہ ہے۔

$$(x^2 + 2\sqrt{3}x + 5)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 5) = 0$$

$$x^4 - 2(5 + 3)x^2 + 25 = 0$$

$$x^4 - 16x^2 + 25 = 0$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{x^2}{1-x} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \dots + \frac{h^2}{1-h} = k$$

کی کوئی خیالی اصل نہیں۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ $x + c$ ایک اصل ہے، تب $f - x$ بھی ایک اصل ہے، لہذا بجائے یہ قیمتیں درج کرو اور پہلے نتیجہ کو دوسرے نتیجہ میں سے تقریب کرو، تب

$$f = \left\{ \frac{x^2}{(f-x)^2} + \frac{b^2}{(f-b)^2} + \frac{c^2}{(f-c)^2} + \dots + \frac{h^2}{(f-h)^2} \right\}$$

اور یہ ممکن نہیں تا وقتیکہ $f = 0$ ۔

۵۳۶۔ مساوات کی بعض اصلوں کی نوعیت معلوم کرنے کے لئے یہ ہمیشہ

ضروری نہیں ہوتا کہ مساوات مذکور کو حل کیا جائے۔ ذیل کے امور کی صحت از خود واضح اور متین ہے۔

(۱) اگر سرسب مثبت ہوں تو مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہو سکتی مثلاً مساوات $لا + لا + لا + لا + لا = کی$ کی کوئی اصل مثبت نہیں ہے۔
(۲) اگر لا کی جنت قوتوں کے سرسب یکساں علامت کے ہوں اور طاقی قوتوں کے سرسب مختلف علامتوں کے ہوں تو مساوات کی کوئی منفی اصل نہیں ہو سکتی۔ مثلاً مساوات

$$لا + لا = لا + لا + لا + لا + لا = کی$$

کی کوئی اصل منفی نہیں ہے۔

(۳) اگر مساوات میں لا کی صرف جنت قوتیں ہوں اور سرسب ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی، مثلاً مساوات $لا + لا + لا + لا + لا = کی$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے۔

(۴) اگر کسی مساوات میں لا کی صرف طاقی قوتیں ہوں اور سرسب ایک ہی علامت کے ہوں تو مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہوتی سوائے $لا =$ مثلاً مساوات $لا + لا + لا + لا + لا = کی$ کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے $لا =$ کے۔

مذکورہ بالا کل نتیجے اگلی دفعہ کے سلسلہ میں شامل ہیں، اس مسئلہ کو ڈی کارٹیز (Descarte) کی علامتوں کا قانون کہتے ہیں۔

۴۴۵۔ مساوات $ف(لا) =$ کی زیادہ سے زیادہ اتنی مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں جتنی کہ $ف(لا)$ میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں اور زیادہ سے زیادہ اتنی منفی علامتیں ہو سکتی ہیں جتنی کہ $ف(-لا)$ میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں فرض کرو کہ ایک کثیرالدرجہ کی قوم کی علامتیں $+++ + - - -$ ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ اگر اس کثیرالدرجہ جملہ کو ایک جملہ ثنائی

سے جسکی علامتیں +۔ ہوں ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب میں علامتوں کی تبدیلی کی جو تعداد ہوگی وہ ابتدائی جملہ کثیرالایقام کی علامتوں کی تبدیلیوں سے کم از کم ایک زیادہ ہوگی۔
 عمل ضرب میں رقموں کی محض علامتیں درج کرنے سے

- + - + - - - + - - + +

- +

- + - + - - - + - - + +

+ - + - + + + - + + - -

+ - + - + + + - + + - + +

ابتدائی جملہ اور حاصل ضرب کی علامتوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
 (۱) ابتدائی جملہ میں جب کہ کسی علامت مسلسل آتی ہے تو ہر تسلسل کے جواب میں حاصل ضرب میں مشتبہ علامت ہوتی ہے
 (۲) مشتبہ علامت یا مشتبہ علامتوں کے پہلے اور بعد کی علامتیں مختلف ہیں۔

(۳) آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوتی ہے۔
 اب سب سے زیادہ ناموافق صورت پر غور کرو کہ سب مشتبہ علامتوں کی بجائے تسلسل بنادے گئے ہیں۔ تب (۲) سے ظاہر ہے کہ خواہ ہم مشتبہ علامتوں کو اوپر کی علامتوں میں تبدیل کریں یا نیچے کی علامتوں میں دونوں صورتوں میں علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد ایک ہی ہے۔ اور ہر کی علامتیں لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد

+ - + - + - - - + - - + +

کی تبدیلیوں کی تعداد سے کم نہیں ہو سکتی اور علامتوں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو ابتدائی کثیرالایقام کا سلسلہ ہے سوائے اس کے آخر میں علامت کی ایک مزید تبدیلی واقع ہوئی ہے۔

پس اگر ہم فرض کریں کہ منفی اور خیالی اصولوں کے متناظر اجزائے ضربی پہلے ضرب دے دیا جائے گا تو ظاہر ہے کہ موصولہ جملہ کو جزو ضربی

لا۔ ا سے ضرب دینے سے (جو ایک مثبت اصل کو تعبیر کرتا ہے) آخری حاصل ضرب میں کم از کم ایک مزید تبدیلی علامت پیدا ہوگی۔ پس کسی مساوات کی مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ اتنی ہو سکتی ہیں جتنی کہ اس میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں۔

نیز مساوات ف (لا) =۔ کی اصلیں ف (لا) =۔ کی اصلوں کے مساوی لیکن مختلف علامت ہیں۔ اس لئے مساوات ف (لا) =۔ کی منفی اصلیں ف (لا) =۔ کی مثبت اصلیں ہیں، لیکن ان مثبت اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہو سکتی ہے جتنی کہ ف (لا) میں علامتوں کی تبدیلیاں ہیں یعنی ف (لا) =۔ کی منفی اصلوں کی تعداد ف (لا) کی علامتوں کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

مثال۔ مساوات لا + ہ لا - لا + ۷ لا + ۲ = ۰ پر غور کرو۔
اس میں علامتوں کی صرف دو تبدیلیاں ہیں، اس لئے مثبت اصلیں زیادہ سے زیادہ دو ہو سکتی ہیں۔

نیز ف (لا) =۔ لا + ۵ لا + لا - لا + ۷ لا + ۲ = ۰

اس میں علامتوں کی نہ ف، نہ تین تبدیلیاں ہیں، اس لئے مفروضہ مساوات کی منفی اصلیں زیادہ سے زیادہ تین ہو سکتی ہیں۔ اس لئے لازماً مساوات زیر بحث کی کم از کم چار خیالی اصلیں ہوں گی۔

مشکل نمبری ۳۵ (ب)

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۳ لا - ۱۰ لا + ۳ لا - ۲ لا - ۶ = ۰ \text{ جبکہ ایک اصل } ۱ + ۳ - ۳ = ۰ \text{ ہو}$$

$$۲ - ۴ لا - ۳ لا - ۳۵ لا - ۳ لا + ۳ = ۰ \text{ جبکہ ایک اصل } ۲ - ۳ - ۳ = ۰ \text{ ہو}$$

$$۳ - لا + ۳ لا + ۵ لا + ۲ لا - ۲ لا - ۲ = ۰ \text{ جبکہ ایک اصل } ۱ + ۱ - ۱ = ۰ \text{ ہو}$$

۳۔ $لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۵ = ۰$ جبکہ ایک اصل $لا = ۱$ ہو

۵۔ مساوات $لا^۵ - لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - ۱۵ = ۰$ جبکہ ایک اصل $لا = ۳$ ہو اور

دوسری $لا = ۲$ ۔ $لا = ۱$ کم سے کم ابعاد کی ایک ایسی مساوات بناؤ جسکے سرناطلق ہوں اور جسکی اصلوں میں سے ایک اصل یہ ہو۔

$$۶۔ لا^۳ + لا^۲ - لا - ۵ = ۰$$

$$۸۔ لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

$$۹۔ لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

۱۰۔ ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ ہوں $لا = ۴$ ، $لا = ۵$ ، $لا = ۲$ ۔

۱۱۔ ایک مساوات بناؤ جس کی اصلیں یہ ہوں $لا = ۱$ ، $لا = ۳$ ، $لا = ۲$ ۔

۱۲۔ آٹھویں درجہ کی ایک منطق سروں والی مساوات بناؤ جس کی ایک اصل $لا^۲ + لا^۳ + لا = ۱$ ہو

۱۳۔ مساوات $لا^۳ + لا^۲ + لا + ۵ = ۰$ کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ $لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ - ۵ = ۰$ کی کم از کم چار خیالی اصلیں ہیں۔

۱۵۔ مساوات $لا^۳ - لا^۲ + لا - ۳ = ۰$ کی اصلوں کی بابت کیا نتیجہ نکالا جاسکتا ہے۔

۱۶۔ مساوات $لا^۳ - لا^۲ + لا^۳ + لا^۲ + ۱ = ۰$ کی خیالی اصلوں کی تعداد کم از کم کیا ہوگی؟

۱۷۔ دو شرط معلوم کرو کہ مساوات $لا^۳ - لا^۲ + لا + ۱ = ۰$ کی

(۱) دو اصلیں مساوی اور مختلف اعزازت ہوں

(۲) اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں

۱۸۔ اگر مساوات $لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰$ کی اصلیں سلسلہ حسابیہ

میں ہوں تو ثابت کرو کہ $لا^۳ - لا^۲ + لا + ۱ = ۰$ اور اگر یہ سلسلہ ہندسیہ میں ہوں

$$\text{فا} (لا + ه) = \text{فار} (ه) + لا \text{فار} (ه) + \frac{لا^2}{2} \text{فار} (ه) + \dots + \frac{لا^n}{n!} \text{فار} (ه)$$

جہاں فار (ه) ، فار (ه) ، فار (ه) ، ... سے وہ نتیجے مراد ہیں جو متواتر مشتق

تفاعلوں فار (لا) ، فار (لا) ، فار (لا) میں لا کی بجائے ہ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثال - اگر فار (لا) = $2لا^2 - لا^3 - لا^4 + لا^5 - لا^6$ تو فار (لا + ۳) کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{یہاں فار (لا) = } 2لا^2 - لا^3 - لا^4 + لا^5 - لا^6 \text{ یعنی فار (۳) = } ۱۳۱$$

$$\text{فار (لا) = } ۸لا^2 - لا^3 - لا^4 + لا^5 - لا^6 \text{ اور فار (۳) = } ۱۸۲$$

$$\text{فار (لا) = } \frac{لا^2}{2} = ۱۲لا^2 - لا^3 - لا^4 + لا^5 - لا^6 \text{ اور فار (۳) = } ۹۷$$

$$\text{فار (لا) = } \frac{لا^3}{3!} = ۸لا^3 - لا^4 - لا^5 + لا^6 \text{ اور فار (۳) = } ۲۳$$

$$۲ = \frac{\text{فار (لا)}}{لا^2}$$

$$\text{پس فار (لا + ۳) = } ۲لا^2 + ۲۳لا^3 + ۹۷لا^4 + ۱۸۲لا^5 + ۱۳۱لا^6$$

مندرجہ بالا قیمت ہرنر (Horner) کے طریقے سے زیادہ آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہے۔
یہ طریقہ ذیل میں درج کیا جاتا ہے:-

$$۵۴۹ - \text{فرض کرو کہ فار (لا) = } ف_۰ لا^۰ + ف_۱ لا^۱ + ف_۲ لا^۲ + \dots + ف_n لا^n$$

رکھو لا = ما + ہ اور فرض کرو کہ فار (لا) ہو جاتا ہے:-

$$ق_۰ ما^۰ + ق_۱ ما^۱ + ق_۲ ما^۲ + \dots + ق_n ما^n$$

اب چونکہ ما = لا - ہ اس لئے ہمیں ذیل کی مساوات متبادلہ حاصل ہوتی ہے:-

$$ف_۰ لا^۰ + ف_۱ لا^۱ + ف_۲ لا^۲ + \dots + ف_n لا^n$$

$$= ق_۰ (لا - ہ)^۰ + ق_۱ (لا - ہ)^۱ + \dots + ق_n (لا - ہ)^n$$

اس لئے ق باقی ہے جو فا (لا) کو لا۔ ہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔
نیز عمل تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق (لا-ھ) + ق (لا-ھ) + \dots + ق (لا-ھ) + ق (لا-ھ)$$

اسی طرح سے ق باقی بچتی ہے جبکہ مندرجہ بالا جملہ کو لا۔ ہ پر تقسیم
کیا جائے اور اس عمل تقسیم سے جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ یہ ہے:-

$$ق (لا-ھ) + ق (لا-ھ) + \dots + ق (لا-ھ) + ق (لا-ھ)$$

اور علیٰ ہذا القیاس، پس ق، ق، ق، ق کی قیمتیں حسب مندرجہ ذیل ہونگی ۵۱۵
نکل سکتی ہیں۔ آخری خارج قسمت ق ہے اور صہرہ مخالف کے مساوی آ

$$\text{جملہ } ۲ \text{ لا} - ۲ \text{ لا} - ۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا} - ۱$$

میں لا کو لا + ۳ میں بدل دینے سے کیا حاصل ہوتا ہے۔

یہاں ہم بانو اتر لا - ۳ پر تقسیم کرتے ہیں۔

یا زیادہ مختصر طور پر اس طرح

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|---|
| ۱ - | ۵ | ۲ - | ۱ - | ۲ |
| ۱۳۱ | ۲۲ | ۱۳ | ۵ | ۲ |
| | ۱۸۲ | ۲۶ | ۱۱ | ۲ |
| | | ۹۷ | ۱۷ | ۲ |
| | | | ۲۳ | ۲ |

| | | | | |
|---------|----|-----|-----|---|
| ۱ - | ۵ | ۲ - | ۱ - | ۲ |
| ۱۳۲ | ۳۹ | ۱۵ | ۶ | |
| <hr/> | | | | |
| ۱۳۳ = ق | ۴۴ | ۱۳ | ۵ | |
| <hr/> | | | | |
| ۱۳۸ | ۳۳ | ۶ | | |
| <hr/> | | | | |
| ۱۸۲ = ق | ۴۶ | ۱۱ | | |
| <hr/> | | | | |
| | ۵۱ | ۶ | | |
| <hr/> | | | | |
| | ۹۷ | ۱۷ | | |
| <hr/> | | | | |
| | | ۲۳ | | |
| <hr/> | | | | |
| | | | | |

پس جواب مطلوبہ یہ ہے۔ ۲ لا + ۲۳ لا + ۹۷ لا + ۱۸۲ لا + ۱۳۱

صفحہ ۵۴۸ سے مقابلہ کرو۔

یہ ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے کہ اشارہ کا طریقہ عددی حسابات میں خاص طور پر مفید ہوتا ہے۔

۵۵۰۔ اگر متغیر (ا) بتدریج بدل کر (ب) سے ب ہو جائے تو تفاعل ف (ا) بتدریج بدل کر ف (ب) سے ف (ب) ہو جاتا ہے۔

فرض کرو کہ ج اور ج + ہ، لا کی ایسی دو قیمتیں ہیں جو ا اور ب کے درمیان واقع ہیں۔ تب

ف (ج + ہ) - ف (ج) = ہ ف (ج)

+ $\frac{1}{2}$ ہ ف (ج) + + $\frac{1}{n}$ ہ ف (ج)

اب ہ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے ف (ج + ہ) اور ف (ج) کے فرق کو ہم اتنا کم کر سکتے ہیں جتنا چاہیں، اس لئے متغیر (ا) میں ایک چھوٹی تبدیلی پیدا کرنے کے تفاعل ف (ا) میں ایک متناظر چھوٹی تبدیلی پیدا ہوتی ہے، پس جب (ا) بتدریج بدل کر (ب) سے ب ہو جاتا ہے تو ف (ا) بتدریج بدل کر ف (ب) سے ف (ب) ہو جاتا ہے۔

۵۵۱۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ہم نے یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ ف (ا) ف (ب) سے بڑھ کر ف (ب) ہو جاتا ہے یا ف (ا) سے گھٹ کر ف (ب) ہو جاتا ہے بلکہ صرف یہ ثابت کیا ہے کہ یہ بغیر کسی یک سمت تبدیلی کے بتدریج ف (ا) سے بدل کر ف (ب) ہوتا ہے۔ ممکن ہے کہ یہ اس تبدیلی کے دوران میں بعض اوقات بڑھتا ہو اور بعض اوقات کم ہوتا ہو۔

جو بالعلم ہم مخفیات کے طریقہ سے واقف ہے مخفی ما = ف (ا) کی خاص صورتوں میں ترسیم بنانے سے ف (ا) کی قیمت کے تدریجی تغیرات کا معائنہ کر سکتا ہے۔

۵۵۲۔ اگر ف (ا) اور ف (ب) مختلف علامت ہوں تو مساوات

فنا (لا) =۔ کی ایک اصل ۱ اور ب کے درمیان حضور واقع ہوگی۔
 جب لا بتدریج بدل کر ۱ سے ب ہو جاتا ہے تو فنا (لا) بتدریج
 بدل کر فنا (۱) سے فنا (ب) ہو جاتا ہے اور ایسا کرنے میں فنا (۱)
 اور فنا (ب) کی کل مابینی قیمتیں اختیار کرتا ہے لیکن چونکہ فنا (۱)
 اور فنا (ب) مختلف علامت ہیں اس لئے قیمت صفر ضرور ان کے درمیان
 ہوتی یعنی ۱ اور ب کے درمیان لا کی کسی نہ کسی قیمت کے لئے فنا (لا)
 =۔ ہوگا۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ ۱ اور ب کے درمیان فنا (لا) =۔ کی
 صرف ایک ہی اصل ہے اور نہ ہی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر فنا (۱) اور فنا (ب)
 کی علامت ایک ہی ہو تو مساوات فنا (لا) =۔ کی ۱ اور ب کے درمیان
 کوئی اصل نہیں ہے۔
 ۵۳۔ طاق درجہ کی کسی مساوات کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے
 اور اس کی علامت آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔
 تفاعل فنا (لا) کی لا کی بجائے بالترتیب $\infty +$ ، ∞ ، $\infty -$
 درج کرنے سے

فنا $(\infty +) = \infty +$ ، فنا $(۰) = فن$ اور فنا $(\infty -) = \infty -$
 اگر فن مثبت ہو تو فنا (لا) =۔ کی ایک اصل $\infty -$ اور ∞ کے درمیان
 ہے اور اگر فن منفی ہو تو فنا (لا) =۔ کی ایک اصل $\infty +$ اور ∞ کے
 درمیان ہوگی۔

۵۴۔ اگر ایک مساوات کا درجہ حقیقت ہو اور اس کی آخری رقم منفی
 ہو تو اس مساوات کی کم از کم دو اصلیں حقیقی ہوں گی جن میں سے ایک مثبت
 ہوگی اور دوسری منفی۔

اس صورت میں فنا $(\infty +) = \infty +$ ، فنا $(۰) = فن$ ، فنا $(\infty -) = \infty -$
 = لیکن فنا منفی ہے، اس لئے فنا (لا) =۔ کی ایک اصل $\infty +$ اور
 $\infty -$ کے درمیان ہے اور ایک اور اصل $\infty -$ اور ∞ کے درمیان ہے۔

اسی طرح سے ہم دیکھا سکتے ہیں کہ اگر مساوات $(\text{فا} \text{ لا}) =$ کی سب اصلیں مساوی ہوں تو $(\text{فا} \text{ لا}) =$ کی سب اصلیں مساوی ہوں گی اور علیٰ بذالقیاس۔

۵۵۸۔ مثلاً اگر بالا قیوت سے ظاہر ہے کہ اگر (لا) میں جزو ضربی $(\text{لا} - ۱)$ شامل ہو تو $(\text{فا} \text{ لا})$ میں جزو ضربی $(\text{لا} - ۱)$ شامل ہوگا۔ پس $(\text{فا} \text{ لا})$ اور $(\text{فا} \text{ لا})$ میں جزو ضربی $(\text{لا} - ۱)$ مشترک ہوگا۔ لہذا اگر $(\text{فا} \text{ لا})$ اور $(\text{فا} \text{ لا})$ میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو تو ظاہر ہے کہ $(\text{فا} \text{ لا})$ میں کوئی جزو ضربی ایکس ہوگا۔ زیادہ بار شامل نہیں ہے، پس مساوات $(\text{فا} \text{ لا}) =$ کی اصلیں مساوی ہوں گی اگر (لا) اور $(\text{فا} \text{ لا})$ میں کوئی مشترک جزو ضربی ہو اور مساوی نہیں ہوں گی اگر ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔

۵۵۹۔ دفعہ ما قبل سے ظاہر ہے کہ مساوات $(\text{فا} \text{ لا}) =$ کی مساوی اصلیں حاصل کرنے کے لئے ہمیں پہلے $(\text{فا} \text{ لا})$ اور $(\text{فا} \text{ لا})$ کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا چاہیئے۔

مثال ۱۔ مساوات $\text{لا} - ۱۱ = ۴۴ - ۲ - ۱۲ = ۴۶ - ۸ =$ میں مساوی اصلیں ہیں، مساوات کو حل کرو۔

یہاں $(\text{فا} \text{ لا}) = \text{لا} - ۱۱$ اور $\text{لا} - ۱۲ = ۴۶ - ۸ =$

$$\text{فا} (\text{لا}) = ۴۴ - ۲ - ۱۲ = ۴۶ - ۸ =$$

اب ہم حسب معمول یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ $(\text{فا} \text{ لا})$ اور $(\text{فا} \text{ لا})$ کا عاود اعظم $\text{لا} - ۲$ ہے، اس لئے $(\text{لا} - ۲)$ ایک جزو ضربی ہے $(\text{فا} \text{ لا})$ کا اور

$$(\text{فا} \text{ لا}) = (\text{لا} - ۲) (\text{لا} - ۱۲) =$$

$$= (\text{لا} - ۲) (\text{لا} - ۳) (\text{لا} - ۴)$$

پس اصلیں ۲، ۳ اور ۴ ہیں۔

مثال ۲۔ اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ مساوات $\text{لا} - ۳ = ۳ - ۲ =$ کی دو اصلیں مساوی ہوں۔

| | |
|--------------|-----|
| $1 + 2 - 3$ | ۱ |
| $3 + 3 - 4$ | ۲ |
| $5 + 2 - 4$ | ۱ = |
| $7 + 2 - 4$ | ۱ + |
| $9 + 5 - 10$ | ± |

$$\dots\dots\dots 5 + 3 - 10 + 5 + 2 + 2 + 3$$

پس خارج قسمت یہ ہے $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \dots\dots\dots$

لہذا جگہ = ۱۰

اشکال نمبری ۳۵ (ج)

(۱) اگر فاضل (لا) = لا + ۱۰ لا + ۹ لا + ۳ لا + ۲ لا + ۴ لا + ۵ لا (۴-لا) کی قیمت معلوم کرو۔

(۲) اگر فاضل (لا) = لا + ۱۲ لا + ۱۴ لا + ۱۵ لا + ۹ لا + ۳ لا (۲+لا) کی قیمت دریافت کرو۔

(۳) اگر فاضل (لا) = لا + ۱۳ لا + ۱۰ لا + ۱۰ لا + ۱۴ لا (تو فاضل لا ۱۰) کی قیمت معلوم کرو۔

(۴) اگر فاضل (لا) = لا + ۱۴ لا + ۱۲ لا + ۴ لا + ۹ لا (۴-لا) کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) اگر فاضل (لا) = لا + ۱۵ لا + ۱۱ لا + ۱۲ لا + ۱۰ لا (۵-لا) کی قیمت معلوم کرو۔

(۶) اگر فاضل (لا) = لا + ۱۶ لا + ۱۱ لا + ۱۰ لا + ۱۰ لا (۶-لا) کی قیمت معلوم کرو۔

(۷) اگر فاضل (لا) = لا + ۱۷ لا + ۱۱ لا + ۱۰ لا + ۱۰ لا (۷-لا) کی قیمت معلوم کرو۔

۸۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا^۲ - ۱۲ لا + ۱۲ = ۰$ کی رشتہ مناسبت ۳ : ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان۔
 ۹۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا^۲ + ۵ لا - ۲۰ = ۰$ کی رشتہ مناسبت اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اور دوسری ۳ اور ۵ کے درمیان۔
 ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو:

$$۱۰۔ لا^۲ - ۹ لا + ۴ = ۰ \quad ۱۱۔ لا^۲ - ۹ لا + ۱۲ = ۰ \quad ۱۲۔ لا^۲ + ۱۲ = ۰$$

$$۱۳۔ لا^۲ - ۳ لا + ۶ = ۰ \quad ۱۴۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۰۸ = ۰$$

$$۱۵۔ لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰ \quad ۱۶۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$$

$$۱۷۔ لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰ \quad ۱۸۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$$

$$۱۹۔ لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰ \quad ۲۰۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$$

$$۲۱۔ لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰ \quad ۲۲۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$$

$$۲۳۔ لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰ \quad ۲۴۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$$

ذیل کی مساواتوں کی اصلیں مساوی ہیں، ان کو حل کرو

$$۲۵۔ لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰ \quad ۲۶۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$$

$$۲۷۔ لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰ \quad ۲۸۔ لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$$

۲۹۔ اسکے لئے شرط معلوم کرو کہ $لا^۲ - ۳ لا + ۲ = ۰$ کی اصلیں مساوی ہوں۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ مساوات $لا^۲ + ۱۸ لا - ۱۸ = ۰$ کی تین اصلیں مساوی نہیں ہو سکتیں۔

۳۱۔ بتاؤ کہ ب کو اسے کیا نسبت ہو کہ مساواتوں

$$۱ لا + ۲ ب + ۱ = ۰ \quad \text{اور} \quad لا + ۲ = لا + ۲ - لا - ۱ = ۰$$

کی (۱) ایک اصل (۲) دو اصلیں مساوی ہوں۔

(۲۳) ثابت کرو کہ مساوات

$$لا + ن لا - ن (۱ - ن) لا - ن + + لا = ۰$$

کی اصلیں مساوی نہیں ہو سکتیں۔

(۲۴) اگر مساوات لا - ۱۰ لا + ب + ج = ۰ کی تین اصلیں مساوی ہوں

$$تو ثابت کرو ۱ ب - ۹ لا + ج = ۰$$

(۲۵) اگر مساوات لا - ۱ لا + ۲ ب + ج لا + ۵ = ۰ کی تین اصلیں مساوی

ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک $\frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۸} ب$ کے مساوی ہے۔

(۲۶) اگر لا + ۲ لا + ج = ۰ کی دو اصلیں باہم مساوی ہوں تو ثابت

کرو کہ ان میں سے ایک اصل ذیل کی مساوات درجہ دوم لا - ۶ می لا

$$+ ۲۵ ت - ۴ ق ر = ۰ \quad \text{کی ایک اصل کے مساوی ہوگی۔}$$

(۲۷) مساوات لا - لا - ۱ = ۰ میں ج کی قیمت معلوم کرو۔

(۲۸) مساوات لا - لا + لا + ۶ = ۰ میں ج اور ج کی قیمتیں معلوم کرو۔

مساواتوں کی تبدیل یا استحالہ

۶۴ - بعض اوقات کسی مساوات کے متعلق بحث زیادہ آسان ہو جاتی ہے اگر

اس مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کر لیا جائے جسکی اصلیں اول الذکر

مساوات کی اصلوں کے ساتھ کوئی خاص ربط رکھتی ہوں، اس قسم کی تبدیلیاں

بعض اوقات ایسی مساوات یعنی مساوات درجہ سوم کے حل میں زیادہ مفید ہوتی ہیں۔

۵۶۵۔ ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مفروضہ مساوات کی اصولوں کے مساوی اور مختلف اخلاست ہوں۔
فرض کرو کہ $(\text{فنا}) = ۰$ ۔ مساوات مفروضہ ہے۔

لا کی بجائے \dots یا لاکھو تب مساوات $(\text{فنا}) = ۰$ مساوات $(\text{فنا}) = ۰$ کی اصل سے پوری ہوتی ہے جبکہ اس اصل کی علامت کو بدلے یا بجائے، پس مساوات مطلوبہ $(\text{فنا}) = ۰$ ہے۔
اگر مساوات مفروضہ

$$\text{فنا} + \text{فنا} + \text{فنا} + \dots + \text{فنا} = \text{فنا}$$

پھر تو ظاہر ہے کہ مساوات مطلوبہ حسب ذیل ہوگی جو اوپر کی مساوات میں دوسری رقم سے شروع ہو کر بتبادل رقم کی علامتیں برتنے سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{فنا} + \text{فنا} + \text{فنا} + \dots + \text{فنا} = \text{فنا}$$

۵۶۶۔ ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جس کی اصلیں ان حاصل ضربوں کے مساوی ہوں جو ابتدائی مساوات کی اصلوں کو ایک خاص مقدار سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ $(\text{فنا}) = ۰$ ۔ مساوات مفروضہ ہے اور قی مذکورہ بالا مقدار خاص کو تبصیر کرتا ہے، $\text{ق} = \text{لاکھو}$ ، تب $\text{لا} = \frac{\text{ق}}{۱۰}$ تب مساوات مطلوبہ $(\text{ق}) = ۰$ ہے۔

اس تبدیل کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے کسی مساوات کو اس کے کسری سروں سے پاک کیا جاسکتا ہے۔

مثال۔ مساوات $\text{لا}^۲ - \frac{۳}{۴}\text{لا} - \frac{۱}{۸}\text{لا} + \frac{۳}{۱۶} = ۰$ میں سے اس کے کسری ناپاک کر۔

لا = $\frac{1}{2}$ بکھرا اور ہر ایک رقم کو ق کے منہ سے دے دیا۔

ما = $\frac{1}{2}$ ق + $\frac{1}{2}$ ق + $\frac{1}{2}$ ق = $\frac{3}{2}$ ق

ق = ۴ لکھتے سے تمام صحیح عدد ہو جاتے ہیں اور ۲ پر تقسیم کرنے سے

ما = ۶ ما = ۱۲

۶ = ۱۲ - ۶ اور ایسا ہی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں مساوات منہ سے دے دینی اصلوں کے شکافوں کے مساوی ہوں۔

منہ سے دے دیا (۱۲) = ۶ مساوات منہ سے دے دے : ما = $\frac{1}{2}$ رکھو۔

یعنی لا = $\frac{1}{2}$ جب مساوات مطلوبہ فا (۱۲) = ۶ ہوگی۔

۱۲ میں تبدیلی کے خاص فائدوں میں سے ایک فائدہ یہ ہے کہ اس سے اُن

جنہوں کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں جو اصلوں کی منفی قوتوں کے متشابہ تفاعلوں پر مشتمل

مثلاً لا = ۱۲ مساوات لا = ۱۲ + ق = ۱۲ کی اصلیں لا = ۱۲ + ق = ۱۲ ہوں تو

لا = $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ کی قیمت معلوم کرو۔

لا = $\frac{1}{2}$ بجائے $\frac{1}{2}$ لکھو اور ما = ۱۲ سے منہ سے دے دے تمام علامتیں بدل دو، تب

مساوات محلہ ما = ۱۲ + ق = ۱۲ کی اصلیں لا = $\frac{1}{2}$ ، لا = $\frac{1}{2}$ ، لا = $\frac{1}{2}$ ہیں

ہیں $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$

مثال ۳ ساواؤں کے ساتھ ۱۲۰۰ ۱۲۰۰ ۱۲۰۰ ۱۲۰۰ کی اصلیں 'ا' 'ب' 'ج' ہوں تو ۱۲۰۰ + ۱۲۰۰ + ۱۲۰۰ + ۱۲۰۰ کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی بجائے $\frac{1}{1200}$ لکھنے سے تبدیل شدہ مساوات

$$1200 + 1200 + 1200 + 1200 = 4800$$

ہو جاتی ہے اور جملہ مفروضہ اس مساوات میں حجم کی قیمت ہے۔

$$1200 = 4800$$

$$1200 = (4800 - 1200) \div 3 = 1200$$

$$1200 + 1200 + 1200 + 1200 = 4800$$

$$1200 = 4800$$

۵۶۸۔ اگر ایک مساوات کے دو طرفوں میں ایک لاکھ لکھنے سے $\frac{1}{1200}$ لکھنے سے مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو تو اس مساوات کو مساوات مشکافی کہتے ہیں۔
ال مساوات مفروضہ

$$1200 + 1200 + 1200 + 1200 = 4800$$

ہو تو اس میں لا کی بجائے $\frac{1}{1200}$ لکھنے سے یہ مساوات حسب ذیل ہو جاتی ہے

$$1200 + 1200 + 1200 + 1200 = 4800$$

اگر یہ دونوں مساواتیں ایک ہی ہوں تو ظاہر ہے کہ

$$\frac{1200}{1200} = 1, \frac{4800}{1200} = 4, \dots, \frac{1200}{1200} = 1$$

$$\frac{1}{1200} = 1200, \frac{1}{1200} = 1200$$

سب سے آخری نتیجہ کی رو سے فن = ۱ = ۰ جس طرح سے ہیں دو قسم کی مشکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔
(۱) فن = ۱ تو

$$ف = فن = ۱, ف = فن = ۲, ف = فن = ۳, \dots$$

یعنی شروع اور آخر کی طرف سے مساوی الفصل درجوں کے مساوی ہوتے ہیں۔
(۲) اگر فن = ۱ تو

$$ف = فن = ۱, ف = فن = ۲, ف = فن = ۳, \dots$$

پس اگر مساوات ۲م اعداد کی ہو تو ف = ۱ یا ف = ۲۔

اس صورت میں اول اور آخر سے مساوی الفصل درجوں بلحاظ مقدار مساوی اور بلحاظ علامت مختلف ہوتی ہیں اور اگر مساوات ۳م جہت درجہ کی ہو تو وسطی غائب ہوتی ہے۔

۵۶۹۔ فرض کرو کہ ف = ۱ = ۰ مشکافی مساوات ہے۔

اگر ف = ۱ = ۰۔ قسم اول کی ہو اور طاق درجہ کی ہو تو اس کی ایک اصل ہوگی یعنی ف = ۱ = ۰۔ یہ تقسیم ہو جائے گا۔ تقسیم کرنے سے اگر خارج قسمت ف = ۱ = ۰ ہو تو ف = ۱ = ۰۔ قسم اول اور درجہ جہت کی مشکافی مساوات ہو۔ اگر ف = ۱ = ۰۔ قسم دوم کی مساوات ہو اور اس کا درجہ طاق ہو تو اس کی ایک اصل + ۱ ہوگی۔ اس صورت میں ف = ۱ = ۰۔ ۱ پر پورا تقسیم ہو جائے گا۔ اور حسب سابق ف = ۱ = ۰ قسم اول اور درجہ جہت کی ایک مشکافی مساوات ہوگی۔

اگر ف = ۱ = ۰۔ قسم دوم اور درجہ جہت کی کوئی مساوات مشکافی ہو تو اس کی ایک اصل + ۱ اور کوئی بھی اصل - ۱ ہوگی۔ اس صورت میں ف = ۱ = ۰۔ ۱ پر تقسیم ہو جائے گا اور حسب سابق ف = ۱ = ۰۔ قسم اول اور درجہ جہت

فرض کرو کہ $(لا) = ۱$ ۔ مساوات مفروضہ ہے۔ $۱ = لا$
 یعنی $لا = ما$ رکھو پس مساوات مطلوبہ $فا (لا) =$ حاصل ہوتی ہے
 مثال۔ ایک مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$لا + فم + لا + فم =$$

کی اصلوں کے مربعوں کے برابر ہوں۔
 $لا = ما$ رکھنے اور تبادلاً رقوم کرنے سے

$$(ما + فم) (لا) = (فم + ما + فم)$$

جس سے $(ما + ۲ فم + فم) (لا) = فم + ما + فم$
 یعنی $۱ + (۲ فم + فم) (لا) = فم + ما + فم$ ۔
 مثال ۲۔ دفعہ ۵۳۹ کے حل سے مقابلہ کرو۔

۵۷۲۔ ایک مساوات کو ایک اور ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں ہر دفعہ
 مساوات کی اصلوں سے بقدر ایک خاص مقدار کے بڑی ہوں۔

فرض کرو کہ $(لا) = ۱$ ۔ مساوات مفروضہ ہے اور ۵ مقدار مقرر ہے۔
 $ما = لا = ۵$ یعنی $لا = ما = ۵$ رکھنے سے مساوات مطلوبہ $فا (ما + ۵) =$
 ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ $فا (ما + ۵) =$ ایک ایسی مساوات ہے جسکی اصلیں
 مساوات $فا (لا) =$ کی اصلوں سے بقدر ۵ کے چھوٹی ہیں۔
 مثال۔ ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$۳۰۰ = ۲۱ + لا + ۴۶ + لا + ۸۳$$

کی اصلوں سے بقدر ۵ کے بڑی ہوں۔
 مطلوبہ مساوات $فا (لا) =$ کی بجائے ۲۰۰ درجہ اول سے حاصل ہوگی
 جسکی اصلیں ۲۰۰ کو بطور مجموعہ علیہ استعمال کیے ہیں اور حساب

طریق سے حساب لگاتے ہیں

$$\begin{array}{r} ۴ \quad ۳۲ \quad ۸۳ \quad ۷۶ \quad ۲۱ \\ ۴ \quad ۲۴ \quad ۳۵ \quad ۶ \quad ۹ \\ ۴ \quad ۱۶ \quad ۳ \quad ۰ \quad ۱ \\ ۴ \quad ۸ \quad ۱۳ - ۱ \\ ۴ \quad ۰ \quad ۱ \end{array}$$

پس تبدیل شدہ مساوات ۴ لا^۲ - ۳ لا^۲ + ۹ = ۰ یا (۴ لا^۲ - ۹) (لا^۲ - ۱) = ۰

اس مساوات کی اصلیں $\frac{۳}{۴}$ - $\frac{۳}{۴}$ + ۱ - ۱ ہیں، پس مساوات

مفروضہ کی اصلیں $\frac{۱}{۴}$ - $\frac{۱}{۴}$ + ۱ - ۱ = ۳ ہیں۔

۵۷۳ - دفعہ تا قبل کی تبدیلی کا خاص فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے ایک مساوات کی کوئی خاص رقم معدوم کی جاسکتی ہے۔
فرض کرو کہ مساوات مفروضہ

$$فبلا + فبلا + فبلا + \dots + فن - لا + فن = ۰$$

تب اگر $ما = لا - ۱$ ہیں نئی مساوات

$$فب(ما + ۱) + فب(ما + ۱) + \dots + فب(ما + ۱) + فن = ۰$$

حاصل ہوئی ہے اگر اس کی رقم کو ما کی نزولی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا جائے تو یہ مساوات ہو جاتی ہے:

$$فب(ما + ۱) + فب(ما + ۱) + \dots + فب(ما + ۱) + فن = ۰$$

$$۰ = \dots + فب(ما + ۱)$$

اگر ہم دوسری رقم کو نکالنا چاہیں تو $ن$ $ف$ $ہ$ $+$ $ف$ $ہ$ $=$ یعنی $ہ$ $=$ $\frac{ف}{ن}$
اگر تیسری رقم کو محدود کرنا مقصود ہو تو

$$\frac{ن(ن-۱)}{۲} ف ہ + (ن-۱) ف ہ + ف ہ =$$

جو $ہ$ میں درجہ دوم کی ایک مساوات ہے، اسی طرح سے ہم کسی اور رقم کو نکال سکتے ہیں۔

بعض اوقات حسب مشق ذیل عمل کرنا زیادہ مفید ہوتا ہے۔

مثال۔ مساوات $ف$ $لا$ $+$ $ق$ $لا$ $+$ $ر$ $لا$ $+$ $س$ $=$ میں سے
دوسری رقم نکال دو

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں $ع$ ، $ب$ ، $ج$ ہیں

$$یعنی ع + ب + ج = \frac{ق}{ف}$$

تب اگر ہم ہر ایک اصل کو بقدر $\frac{ق}{ف}$ کے بڑھا دیں تو تبدیل شدہ

مساوات میں اصلوں کا حاصل جمع $\frac{ق}{ف} + \frac{ق}{ف} + \frac{ق}{ف}$ کے مساوی ہوگا یعنی
دوسری رقم کا سر صفر ہوگا۔

پس مساوات مفروضہ میں $لا$ کی بجائے $\frac{ق}{ف}$ رکھنے سے مطلوبہ

تبدیلی حاصل ہوتی ہے۔

۴۷۵۔ مساوات $ف$ $لا$ $=$ سے ہم ایک ایسی مساوات بنا سکتے ہیں جسکی
اصلیں مساوات مفروضہ کی اصلوں کے ساتھ کسی خاص ربط کے ذریعہ مربوط ہوں
فرض کرو کہ مساوات مطلوبہ کی ایک اصل $ما$ ہے، نیز فرض کرو کہ ربط
 $ف$ $(لا)$ $ما$ ربط مذکور کو تعبیر کرتا ہے۔ تب تبدیل شدہ مساوات یا اس طرح
حاصل ہوتی ہے کہ مساوات $ف$ $(لا)$ $ما$ $=$ کے ذریعہ $لا$ کو $ما$ کے

تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے اور پھر لا کی اس قیمت کو جو ما کی رقوم میں حاصل کی گئی ہے مساوات (لا) = میں درج کیا جائے یا مطلوبہ مساوات کی طرح حاصل ہوگی کہ ہم لا کو مساواتوں فا (لا) = اور فہ (لا) = سے ساقط کر کے ما کی رقوم میں شدہ حاصل کریں۔

مثال ۱۔ اگر مساوات لا + ف + ق + لا + مر = کی اصلیں (ا، ب، ج) ہوں تو ایک مساوات بتاؤ جبکی اصلیں

$$\text{ا۔ } \frac{1}{ب} - ج، \text{ ب۔ } \frac{1}{ج} - ا، \text{ ج۔ } \frac{1}{ا} - ب$$

ہوں۔

جب مساوات معروضہ میں لا = اور تبدیل شدہ مطلوبہ مساوات میں ما = اور۔ $\frac{1}{ب} - ج$

$$\text{لیکن ا۔ } \frac{1}{ب} - ج = \frac{1}{ا} - ب = \frac{1}{ج} - ا + \frac{1}{ا} - ب$$

اس لئے تبدیل شدہ مساوات

$$ما = لا + \frac{لا}{ا} \text{ یعنی لا} = \frac{لا}{ا + ۱}$$

کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

پس مطلوبہ مساوات =

$$لا + ف + ر (ا + ۱) + ق (ا + ۱) + مر (ا + ۱) = ۰$$

مثال ۲۔ ایک مساوات بتاؤ جبکی اصلیں مساوات درجہ سوم

$$لا + ق + لا + ر = ۰$$

کی اصلوں کے فرقوں کے ہر یوں کے مساوی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات درجہ سوم کی اصلیں (ا، ب، ج) ہیں، تب مطلوبہ مساوات کی اصلیں (ب - ج)، (ج - ا)، (ا - ب)

ابتدائی مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی۔
 اگر $۲ لا + ۴ ق = ۳$ مثبت ہو تو تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل منفی ہوگی
 (دیکھو دفعہ ۵۵۳) اس لئے ابتدائی مساوات کی دو اصلیں خیالی ہونگی کیونکہ خیالی
 اصولوں کا زوج ہی تبدیل شدہ مساوات کی ایک اصل کو منفی کر سکتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۵ (۵)

(۱) مساوات $۲ لا + ۴ ق = ۳$ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل
 کر دیجئے کہ صحیح عدد ہوں اور پہلی رقم کا سر ایک ہو۔
 (۲) مساوات $۲ لا + ۴ ق = ۳$ کو ایک اور مساوات میں
 تبدیل کر دیجیے پہلی رقم کا سر ایک ہو۔
 ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۳) ۲ لا + ۴ ق = ۳$$

$$(۴) لا + ۴ ق = ۱۰$$

$$(۵) لا + ۴ ق = ۱$$

$$(۶) لا + ۴ ق = ۲$$

(۷) اگر مساوات $۲ لا + ۴ ق = ۳$ کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ

ہیں ہوں تو اس کو حل کرو۔

(۸) مساوات $۲ لا + ۴ ق = ۳$ کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں

ان اصولوں کو دریافت کرو۔

(۹) اگر مساوات $۲ لا + ۴ ق = ۳$ کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں

تو ثابت کرو کہ وسطی اصل ۳ ب کے مساوی ہے۔

(۱۰) مساوات $۲ لا + ۴ ق = ۳$ کو حل کر دیجئے

اس کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

ذیل کی مساواتوں میں سے دوسری رقم خارج کرو۔

$$(11) \quad 3x^2 + 4x - 10 = 0$$

$$(12) \quad 3x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(13) \quad 5x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$(14) \quad 12x^2 + 3x - 1 = 0$$

(15) مساوات $3x^2 - 2x = 0$ کو ایک ایسی مساوات میں تبدیل کرو جسکی اصلیں

مساوات مفروضہ کی اصلوں سے بقدر $\frac{1}{3}$ کے بڑی ہوں۔

(16) مساوات $3x^2 + 2x - 4 = 0$ کی اصلوں کو بقدر $\frac{1}{3}$ کے کم کرو۔

(17) ایک مساوات بناؤ جسکی ہر ایک اصل مساوات $5x^2 + 4x - 3 = 0$ کی

ایک اصل سے بقدر $\frac{1}{5}$ کے بڑی ہو۔

(18) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مساوی ہوں۔

(19) ایک مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات $3x^2 + 2x - 4 = 0$ کی

اصلوں کے کمپوں کے مساوی ہوں۔

اگر a, b, c مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات

بناؤ جسکی اصلیں یہ ہوں۔

(20) اگر a, b, c مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات

$$(21) \quad \frac{a}{b}x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(۲۳) (ب + ج + \frac{1}{J}) (ج + I + \frac{1}{I}) (I + ب + \frac{1}{B})$$

$$(۲۴) I (ب + ج + \frac{1}{J}) ب (ج + I + \frac{1}{I}) ج (I + ب + \frac{1}{B})$$

$$(۲۶) (\frac{I}{J} + \frac{J}{I}) (\frac{J}{B} + \frac{B}{J}) (\frac{B}{I} + \frac{I}{B})$$

$$(۲۷) ثابت کرو کہ مساوات I + I + I + I + I = I کی اصلیں مساوات$$

$$I + I + I + I + I = I کی اصلوں کے مکعبوں کے مساوی ہیں۔$$

$$(۲۸) مساوات I - I - I - I - I = I کی اصلیں$$

$$I - I - I - I - I = I کی شکل کی ہیں، مساوات کو حل کرو۔$$

$$(۲۹) اگر I + I + I + I + I = I کی اصلیں سلسلہ سبقتیہ میں ہوں تو$$

$$ثابت کرو کہ I = I (I - I - I)۔$$

کئی مساواتیں

$$۵۷۵۔ کئی مساوات یا مساوات درجہ سوم کی عام سے عام شکل$$

$$I = I + I + I + I + I = I$$

ہے، لیکن جیسا کہ دیکھ سکتے ہیں، I + I + I + I + I = I کی اصلیں اس مساوات کو مستحکم
سادہ شکل I + I + I + I + I = I میں مختصر کیا جاسکتا ہے، جس میں ہم مساوات
درجہ سوم کی معیار کی شکل کے لئے یہی مساوات لیں گے۔

$$۵۷۶۔ مساوات I - I - I - I - I = I کو حل کرو$$

$$فرض کرو کہ I = I + I + I + I + I$$

$$I = I + I + I + I + I = I + I + I + I + I$$

اور مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$$ما + ی^۲ = (ما + ی + ق)(لا + ر) = ۰$$

اب تک ما اور ی کوئی دو مقادیر ہیں جن پر صرف یہ مشروط عائد کی گئی ہے کہ ان کا حاصل جمع مساوات مفروضہ کی اصلوں میں سے ایک کے مساوی ہے اگر مزید باتیں ہم یہ فرض کریں کہ یہ مساوات $ما + ی + ق = ۰$ کو پورا کرتی ہیں تو ان کی قیمت مکمل طور پر معلوم ہو سکتی ہے، اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے +

$$ا^۲ + ی^۲ = ۰، ر، ما + ی^۲ = -\frac{ق}{۲}$$

اسلئے $ا^۲$ اور $ی^۲$ ، مساوات درجہ دوم

$$ت^۲ + ر ت = -\frac{ق}{۲} = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔ اس مساوات کو حل کرنے اور

$$ا^۲ = -\frac{۱}{۲} + \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{ق}{۲}} \quad (۱)$$

$$ی^۲ = -\frac{۱}{۲} - \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{ق}{۲}} \quad (۲)$$

رکھنے سے ہمیں لا کی قیمت ربط $لا = ما + ی$ سے حاصل ہوتی ہے،

$$پس لا = -\frac{۱}{۲} + \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{ق}{۲}} + -\frac{۱}{۲} - \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{ق}{۲}} = -\frac{۱}{۲}$$

اوپر کا حل عام طور پر کاسڈن کا حل کہلاتا ہے کیونکہ اُس نے اول مرتبہ اس حل کو ششہ میں اُمرس مشیگنا میں شائع کیا تھا۔ کارڈن نے یہ حل ٹاسرنگلیا سے حاصل کیا تھا لیکن قراین سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات درجہ سوم کا حل پہلے پہل سی پیو فیئرٹیو نے تقریباً ششہ میں

دریافت کیا تھا۔ اس مضمون پر نہایت دلچسپ اور تاریخی بحث ہرن مساویث اور پین ٹن کی کتاب نظریہ معادلات کے آخر میں درج ہے۔

۵۷۔ دفعہ ما قبل کی مساواتوں (۱۱) اور (۱۲) میں بائیں جانب جو مقادیر ہیں ان میں سے ہر ایک مقدار کے حسب دفعہ ۱۱۰ تین جذرا لکعب ہیں، پس بظاہر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لاکھ ۹ قیمتیں ہیں مگر درحقیقت ایسا نہیں ہے چونکہ

ما ی = ۳۔ اسلئے جذرا لکعبوں کے وہ زوج لینے چاہئیں جن میں سے ہر ایک کا حاصل ضرب ناطق ہو۔ لہذا اگر جذرا لکعبوں کے کسی ایک زوج کی قیمتوں کو جو اس شرط کو پورا کرے ما ی سے تغیر کیا جائے تو اس شرط کو پورا کرنے والے باقی جوڑے سہ ما، سہ ی اور سہ ما، سہ ی ہونگے جہاں سہ اور سہ ایک کے جذرا لکعب ہیں، اسلئے مساوات کی اصلیں ما + ی، سہ ما + سہ ی، سہ ما + سہ ی ہیں۔

مثال۔ مساوات لا۔ ۱۵ = لا ۱۲۶

ما + ی = لا رکھو تب

$$ما + ی + ۳ = لا (۳ ما ی - ۱۵) = لا ۱۲۶$$

$$۳ ما ی - ۱۵ = . رکھو$$

$$تب ما + ی + ۳ = ۱۲۶ / نیز ما ی + ۳ = ۱۲۵$$

اسلئے ما ی ۳ مساوات ذیل کی اصلیں ہیں۔

$$ت ۱۲۶ - ت ۱۲۵ =$$

$$۱ = ی + ۳ / ۱۲۵ = ما + ۳$$

$$۱ = ی / ۵ = ما$$

$$پس ۶ = ۱ + ۵ = ی + ما$$

$$سہ ما + سہ ی = \frac{۳-۱+۱}{۲} + ۵ \times \frac{۳-۱+۱}{۲}$$

$$= ۳ - ۲ + ۳ =$$

$$\text{سسہ} + \text{ما} = \text{سی} = ۳ - ۲ - ۱$$

اور اصلیں ۳ - ۲ + ۱ = ۲ ، ۳ - ۲ - ۱ = ۰ ہیں۔

۵۶۸۔ اب ہم اس امر کی تشریح کر دینا چاہتے ہیں کہ وفد ۵۶۷ میں لاکھ ۹ قیمتیں کیوں حاصل ہوئی ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ما اور سی مساواتوں

$$\text{ما} + \text{سی} = ۲ = ۰ ، \text{ما} = ۳ - ۲ \text{ سے حاصل ہوتے ہیں، لیکن}$$

دوران حل میں دوسری مساوات کو حل کر مآ سی = ۲ - ۳ بنا دیا جاتا ہو

اور ظاہر ہے کہ موخر الذکر مساوات میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہوگی اگر ما سی = ۳ - ۲

$$\text{یا۔} \frac{\text{سسہ}}{۳} ، \text{پس لاکھ باقی چھ قیمتیں مساوات درجہ سوم}$$

$$\text{لا} + \text{سی} = ۲ = ۰$$

$$\text{لا} + \text{سی} = ۲ = ۰$$

کے حل ہیں۔

۵۶۹۔ اب ہم مساوات لا + سی = ۲ کی اصلوں پر زیادہ تفصیل کے ساتھ بحث کرتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{\text{لا}}{۲} + \frac{\text{سی}}{۲}$ مثبت ہو تو ما اور سی دونوں حقیقی ہیں، فرض کرو کہ ما اور سی بالترتیب ما اور سی کے حسابی ہندسوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب مساوات مذکور کی اصلیں

$$\text{ما} + \text{سی} ، \text{سسہ} + \text{ما} ، \text{سی} + \text{سسہ}$$

ہیں۔ بن اصول ہیں جسے پہلی اصل حقیقی ہے اور سسہ اور سسہ کی قیمتیں درج کرنے سے ملتی ہیں۔

$$\text{سسہ} = \frac{\text{ما} + \text{سی}}{۲} ، \text{ما} = \frac{\text{ما} + \text{سی}}{۲} ، \text{سی} = \frac{\text{ما} + \text{سی}}{۲} \text{ حاصل ہوتی ہیں}$$

(۲) اگر $\frac{ق^۲}{۲۷} + \frac{ر}{۴} = صفر$ ہو تو $ما = ی$ ، اس صورت میں $ما = ی$ اور اصلیں

۲ ما، ما (سہ + سہ)، ما (سہ + سہ) ہو جاتی ہیں یعنی ۲ ما، ما، ما۔

(۳) اگر $\frac{ق^۲}{۲۷} + \frac{ر}{۴} =$ منفی ہوں تو $ما$ اور $می$ ، ۱ + خ ب اور ۱ - خ ب

کی شکل کے دو خیالی جملے ہیں، فرض کرو کہ ان مقادیر کے جذرا الکعب م + خ ن اور م - خ ن ہیں، تب مساوات زیر بحث کی اصلیں یہ ہو جاتی ہیں -

$$م + خ ن + م - خ ن$$

$$(م + خ ن) (سہ + (م - خ ن) سہ) \quad یا \quad م - م - ن - م$$

$$(م + خ ن) (سہ + (م - خ ن) سہ) \quad یا \quad م + م + ن + م$$

اور یہ سب حقیقی مقداریں ہیں لیکن چونکہ خیالی مقادیر کے جذرا الکعب نکالنے کا کوئی عام جبر یہ یا حسابی قاعدہ نہیں ہے ۱ دیکھو دفعہ ۸۹ اسلئے دفعہ ۵۷۶ کا حل اس صورت میں جبکہ مساوات کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں کسی عمل فائدہ پر مشتمل نہیں ہوتا۔

اس حل کو بعض اوقات کارڈن کے حل کی ناقابل تخریب صورت کہتے ہیں۔

۵۸۰۔ اس ناقابل تخریب صورت میں جبکہ ابھی ذکر ہوا مساوات کے حل کی تکمیل بدریہ علم مختلف حسب ذیل ہوسکتی ہے۔ فرض کرو کہ حل

$$۱ = (۱ + خ ب) + (۱ - خ ب)$$

ہے، ۱ = رجم طہ، ف = رجم طہ رکھو یعنی $ر = ۱ + ب$ اور $س طہ = ب$

$$تب \quad (۱ + خ ب) + (۱ - خ ب) = ر (جم طہ + خ جب طہ) \quad \{$$

اب ذی مائیرے کے مسئلہ کی روش سے اس جوں کی تین قیمتیں

یہ ہیں۔

$$\sqrt[4]{(جم\ ط + خ\ جب\ ط)} \quad \sqrt[4]{(جم\ ط + خ\ جب\ ط)}$$

$$\sqrt[4]{(جم\ ط + خ\ جب\ ط)}$$

جہاں $\sqrt[4]{}$ کے حسابی جذر الکعب کو تعبیر کرتا ہے اور ط وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ ہے جو مساوات $مس\ ط = \frac{ب}{ا}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

(ا-خ ب) کی تین قیمتیں نتائج بالا میں خ کی علامت کو بدلنے سے حاصل ہوتی ہیں، پس مطلوبہ اصلیں یہ ہیں:-

$$\sqrt[4]{جم\ ط} \quad \sqrt[4]{جم\ ط} \quad \sqrt[4]{جم\ ط}$$

مساوات درجہ چہارم

۵۸۱۔ اب ہم محل طور پر بعض ایسے طریقوں پر بحث کرتے ہیں جو مساوات درجہ چہارم کا عام حل حاصل کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں ہم دیکھیں گے کہ ان طریقوں میں سے ہر ایک میں پہلے ہمیں ایک معاون مساوات درجہ سوم کو حل کرنا پڑتا ہے، پس ظاہر ہے کہ مساوات درجہ سوم کی مانند مساوات درجہ چہارم کا عام حل بھی کسی مفروضہ عددی مساوات کا حل فوراً لکھ لینے کے لئے موزوں نہیں۔

۵۸۲۔ مساوات درجہ چہارم کا حل پہلے پہل کارڈن کے ایک شاگرد فیوکاری نے بطریق ذیل حاصل کیا تھا:-

مساوات درجہ چہارم کو $لا^۴ + ۲فلا^۳ + ۲قلا^۲ + رلا + س = ۰$ سے تعبیر کرو۔

مساوات سے دووں جانب (ا-لا + ب) جمع کر دو جہاں مقابلہ اور ب کو اس طرح منتخب کیا گیا ہے کہ مساوات بالائی دائیں جانب کا مرکز پورا

مربع بن جاتا ہے۔ تب

$$لا^۲ + ف^۲ لا^۲ + (ق + وا)^۲ لا^۲ + ۲(ر + اب) لا + س + ب^۲ = (وا + ب)^۲$$

فرض کرو کہ مساوات کی دائیں جانب کا رکن $(لا^۲ + ف^۲ لا + ک)^۲$ کے مساوی ہے، تب سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$ف^۲ + ۲ک = ق + وا، فک = ر + اب$$

$$ک^۲ = س + ب^۲$$

ان مساواتوں میں سے $وا$ اور $ب$ کو ساقط کرنے سے

$$(فک - ر) = (۲ک + ف^۲ - ق) (ک - س)$$

یا $۲ک - ق + ۲(ف - ر - س)ک - ف^۲ س + ق س - ر^۲ = ۰$
اس مساوات درجہ سوم سے $ک$ کی ایک حقیقی قیمت ضرور نکل سکتی ہے (دیکھو دفعہ ۵۵) اس طرح سے $وا$ اور $ب$ معلوم ہو جاتے ہیں۔ نیز

$$(لا^۲ + ف^۲ لا + ک)^۲ = (وا + ب)^۲$$

$$\therefore لا^۲ + ف^۲ لا + ک = \pm (وا + ب)$$

اور لا کی قیمتیں درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$لا^۲ + (ف - وا) لا + (ک - ب) = ۰$$

$$لا^۲ + (ف + وا) لا + (ک + ب) = ۰$$

$$\text{مثال} - \text{مساوات } لا^۲ - ۲(لا^۲ - ۵لا + ۱۰ - لا - ۳) = ۰$$

کو حل کرو۔

مساوات کے دونوں طرف $لا^۲ + ۲$ اور $ب + لا$ جمع کرو اور فرض کرو کہ

$$لا^۲ (۲ + ۳) + (۵ - لا^۲) (۲ + لا^۲) = ۳ - لا^۲ (لا^۲ + ک) \quad \text{تب روں کو مساوی کرنے سے}$$

$$لا^۲ (۲ + ۳) + ۵ - لا^۲ = ۳ - لا^۲ (لا^۲ + ک)$$

$$لا^۲ (۲ + ۳) + ۵ - لا^۲ = ۳ - لا^۲ (لا^۲ + ک)$$

$$لا^۲ (۲ + ۳) + ۵ - لا^۲ = ۳ - لا^۲ (لا^۲ + ک)$$

$$\text{آزائش سے معلوم ہوتا ہے کہ ک = ۱، اس لئے لا^۲ = ۳، ب = ۳،}$$

$$لو ب = ۳$$

لیکن غرضہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلے ہے کہ

$$(لا^۲ - لا + ک) = (لا^۲ + ب)$$

ک، لا اور ب کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں دو مساواتیں

$$(لا^۲ - لا - ۱) = (۲ - لا)$$

$$\text{حاصل ہوتی ہیں، یعنی لا^۲ - لا - ۱ = ۰ اور لا^۲ + لا - ۳ = ۰}$$

$$\text{جن کی اصلیں } \frac{لا^۲ + ۱ \pm \sqrt{لا^۴ - ۴}}{۲} \text{، } \frac{لا^۲ - ۳ \pm \sqrt{لا^۴ - ۴}}{۲} \text{ ہیں}$$

۵۸۳۔ ذیل کا حل ڈی کارٹیز نے ۱۶۳۷ء میں شائع کیا تھا۔ فرض کرو کہ مساوات درجہ چہارم کا اختصار کر کے اس کو ذیل کی شکل

$$لا^۲ + ق (لا^۲ + ر لا + س) = ۰$$

میں لایا گیا ہے۔ اب فرض کرو کہ

$$لا^۲ + ق (لا^۲ + ر لا + س) = (لا^۲ + ک + ل) (لا^۲ + ک - ل + م)$$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$ل + م - ک = ۱، ق، ک (م - ل) = ر، ل م = س$$

ان مساواتوں میں سے پہلی دو سے حاصل ہوتا ہے

$$۲م = ک + ق + ۱، ۲ل = ک + ق - ۱$$

پس تیسری مساوات میں درج کرنے سے

$$(ک + ق + ک) (ک + ق - ک) = (ر - ر) = ۴س ک$$

$$۱ ک + ۲ ق + ۲ ک = (ق - ۴س) ک - ۲ = ۰$$

یہ مساوات ک^۲ میں درجہ سوم کی مساوات ہے جسکی ایک اصل حقیقی اور مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۳۵۵) پس جب ک کی قیمت معلوم ہو تو اس سے ل اور م کی قیمتیں نکل سکتی ہیں اور مساوات درجہ چہارم کا حل درجہ دوم کی دو مساواتوں

$$لا + ک لا + ل = ۰$$

$$لا - ک لا + م = ۰$$

کو حل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

مثال - مساوات لا^۴ - ۲لا^۳ + ۸لا^۲ - ۳ = ۰ کو حل کرو

$$\text{فرض کرو کہ } لا = ۲، ۲لا = ۸، ۸لا = ۳، (لا + ک لا + ل) (لا - ک لا + م) = ۰$$

تب سروں کو مساوی کرنے سے

$$ل + م - ک = ۲، ۲ = ک (م - ل) = ۸، ل م = ۳$$

(ان سے حاصل ہوتا ہے) (ک - ۲ + ک) (ک - ۲ - ک) = (۸ - ۸) = ۰

$$۱ ک - ۲ م + ۲ ک = ۱۶ - ۴ = ۰$$

یہ مساوات صریحاً پوری ہوتی ہے۔ جبکہ ک' - ۴ = ۰ یعنی ک = ۴، ک کی صرف ایک قیمت پر غور کرنا کافی ہوگا، ک = ۴ رکھنے سے

$$م + ل = ۲، م - ل = ۴ \text{ یعنی } ل = -۱، م = ۳$$

$$\text{پس } لا^۲ - ۲لا + ۸لا - ۳ = (لا^۲ + ۲لا - ۱)(لا^۲ + ۳)$$

$$\text{اس لئے } لا^۲ + ۲لا - ۱ = ۰ \text{ اور } لا^۲ - ۳ + ۳ = ۰$$

پس معلوم ہوتا ہے - ۱ ± ۲ اور ۱ ± ۲ ہیں

۵۸۔ چوتھے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کا عام جبر یہ حل اب تک دریافت نہیں ہوا اور ایسبل کا یہ دعویٰ کہ ایسا حل معلوم کرنا ناممکن ہے ماہرین ریاضی کے نزدیک عام طور پر مقبول ہے، لیکن اگر کسی مساوات کے سر عددی ہوں تو تقریبی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہارسنس کا طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اس کی رو سے کسی حقیقی اصل کی تقریبی قیمت معلوم ہو سکتی ہے، اس مضمون پر مفصل بحث مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں مل سکتی ہے۔ ۵۸۵۔ اب ہم چند متفرق مساواتوں پر بحث کر کے اس باب کو ختم کرنا چاہتے ہیں۔

مثال ۱۔ مساواتوں $لا + ما + ی + د = ۰$

$$لا + ب + ما + ج + ی + د = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج + ی + د + و = ۰$$

$$لا + ب + ما + ج + ی + د + و = ک$$

کو حل کرو۔

نیچے سے شروع ہو کر ان مساواتوں کو بالترتیب ا، ب، ق، ر سے ضرب دو جہاں ف، ق، ر ایسی مقادیر ہیں جو تا حال نامعلوم ہیں۔ فرض کرو کہ یہ مقادیر ایسی ہیں کہ مساواتوں کے حاصل جمع میں ما، ی، د کے سر معدوم ہو جائیں، تب

$$لا(ا^۱ + ف^۱ + ق^۱ + ر) = ک$$

اور ب، ج، د مساوات

$$ت^۲ + ف^۲ + ق^۲ + ر = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

$$ہذا \quad ا^۱ + ف^۱ + ق^۱ + ر = (ا - ب)(ا - ج)(ا - د)$$

$$پس \quad (ا - ب)(ا - ج)(ا - د) = لا = ک$$

اس سے لا کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور تشاکل سے ما، می اور و کی قیمتیں بھی لکھی جاسکتی ہیں۔

نیتجہ صریح - اگر مساواتیں یہ ہوں:-

$$لا + ما + می + و = ا$$

$$ا + لا + ب + ما + ج + می + د = ک$$

$$ا + لا + ب + ما + ج + می + د + و = ک^۲$$

$$ا + لا + ب + ج + می + د + و = ک^۳$$

حسب سابق عمل کرنے سے

$$لا(ا^۱ + ف^۱ + ق^۱ + ر) = ک^۲ + ک^۳ + ق^۱ + ق^۲ + ق^۳ + ر$$

$$: \quad (ا - ب)(ا - ج)(ا - د) = لا = ک^۲ + ک^۳ + ق^۱ + ق^۲ + ق^۳ + ر$$

اس طرح سے لا کی قیمت معلوم ہو گئی اور ما، می، و کی قیمتیں تشاکل سے لکھی جاسکتی ہیں۔

آپ کی مساواتوں کا عمل معلوم سروں کے استعمال کرنے سے آسانی سے حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال ۲ - ثابت کرو کہ مساوات

(لا-ا) (لا-ب) (لا-ج) - ف (لا-ا) - گ (لا-ب) - ہ (لا-ج) - ن گ ہ۔

کی اصلیں سب حقیقی ہیں۔

سہارن اور جہاد سے

(لا-ا) (لا-ب) (لا-ج) - ف (لا-ا) - گ (لا-ب) - ہ (لا-ج) - ن گ ہ۔

- ۲ ف گ ہ =

نہیں کرو کہ ف، ف مساوات درجہ دوم

(لا-ب) (لا-ج) - ف =

کی اصلیں ہیں، نیز ف نہ کرو کہ ف، ف سے کم نہیں ہے۔ اس مساوات کو حل کیلئے

۲ لا = ب + ج + ا (ب-ج) + ۲ ف = ۲ ف (۱)

اور جہاں ہم کی قیمت ب نہ ج سے بڑی ہے، پس ف بڑا ہے جہاں ج سے اور
ق چھوٹا ہے ب یا ج سے۔

مساوات معروضہ میں لا کی بجائے بالترتیب یہ قیمتیں

+ ∞، ف، ق، - ∞

درج کر کے سے نتائج ذیل

- ∞، (گ) (ف) - ب - ہ - ف (ج) - ا + (گ) (ب) - ق - ہ - ج (ق) -

- ∞

جہاں ج سے ہیں کہ (ف) - ب (ج) - ف = (ب) - ق (ج) - ق

سہارن اور جہاد میں حقیقی اصلیں ہیں جن میں سے ایک ف سے بڑی ہے دوسری
ب۔ رتی کے درمیان ہے اور تیسری ف سے کم ہے۔

اگر ف = ق تو (ا) سے (ب-ج) + ہ = ف = ۰، اس لئے

ب-ج = ج اور ف = ۰، اس صورت میں مساوات معروضہ یہ ہو جاتی ہے۔

۱ لا-ب (لا-ا) (لا-ب) - گ - ہ = ۰

پس سب اصلیں حقیقی ہیں۔

اگر مساوات کی ایک اصل ہو تو تحقیقات بالا اکام رہتی ہے، کیونکہ اس سے صرف یہ ظاہر ہوتا ہے کہ $\infty + \infty$ کے درمیان صرف ایک اصل ہے اور وہ ∞ ہے، لیکن چونکہ حسب سابق ∞ سے کم بھی ایک حقیقی اصل ہے اس لئے تیسری اصل کو لازماً حقیقی ہونا چاہیے، اسی طرح سے اگر ∞ مساوات مفروضہ کی اصل ہو تو یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

یہ مساوات جس پر یہاں بحث کی گئی ہے بہت اہمیت رکھتی ہے، ہندسہ محاسبات میں یہ بار بار آتی ہے اور نیز کئی کے نام سے موسوم ہوتی ہے۔

۵۸۶۔ علمی ریاضی کی اکثر شاخوں میں مساواتوں کا نظام ذیل بکثرت استعمال ہوتا ہے۔

مثال۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$1 = \frac{y}{x + z} + \frac{a}{b + z} + \frac{a}{a + z}$$

$$1 = \frac{y}{x + z} + \frac{a}{b + z} + \frac{a}{a + z}$$

$$1 = \frac{y}{x + z} + \frac{a}{b + z} - \frac{a}{a + z}$$

طہ میں ذیل کی مساوات پر غور کرو۔

$$1 = \frac{y}{x + z} + \frac{a}{b + z} + \frac{a}{a + z} - 1 = \frac{y}{x + z} + \frac{a}{b + z} + \frac{a}{a + z} - \frac{(x + z)(b + z)(a + z)}{(x + z)(b + z)(a + z)}$$

اور فی الحال لا، ما، ی کو معلوم مقدار میں تصور کرو۔

جب اس مساوات کو کسر دس سے پاک کیا جائے تو یہ طہ میں درجہ دوم کی مساوات ہوتی ہے اور معادلات معلومہ کی وجہ سے طہ کی یمن قیمتوں طہ = لا، طہ = ما، طہ = ند سے پوری ہوتی ہے۔ پس یہ ایک مساوات متماثلہ ہے۔ (دیکھو دفعہ ۳۱۰)۔

$$۱۳- لا^۱- ۳ لا^۲- ۶ لا^۳- ۲ = ۱۴- لا^۱- ۲ لا^۲- ۱۲ لا^۳+ ۱۰ لا^۴+ ۳ =$$

$$۱۵- ۲ لا^۱- ۲۰ لا^۲+ ۳۳ لا^۳- ۲۰ لا^۴+ ۴ =$$

$$۱۶- لا^۱- ۶ لا^۲- ۱۴ لا^۳+ ۱۴ لا^۴+ ۶ لا^۵+ ۱ =$$

$$۱۷- لا^۱+ ۵ لا^۲+ ۱۲ لا^۳- ۸۰ لا^۴- ۱۹۲ =$$

$$۱۸- قی اور ر کو باہمی ربط دریافت کرو کہ مساوات لا^۱+ قی لا+ ر =$$

ذیل کی شکل لا^۱= (لا^۲+ لا+ ب) میں رکھی جاسکے۔

$$اس سے مساوات ۸ لا^۲- ۳۶ لا+ ۲۷ = کو حل کرو۔$$

$$۱۹- اگر لا^۲+ ۳ لا+ ۳ قی لا+ ر اور لا^۲+ ۲ لا+ قی میں ایک جزو$$

مربی مشترک ہو تو ثابت کرو کہ

$$۴ (ف^۱- قی) (قی- لا) (قی- ف) = (ف- قی) (ف- ر) (ف- قی) =$$

اگر ان میں دو اجزائے مربی مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ف- قی = قی- لا اور قی- ف = ر =$$

$$۲۰- اگر مساوات لا^۱+ ۳ لا^۲+ ۳ لا+ ۳ ج لا+ ۵ = کی دو اہلیں مساوی$$

ہوں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک $\frac{ب-ج-لا}{۲(ج-ب)}$ کے مساوی ہے۔

$$۲۱- ثابت کرو کہ مساوات لا^۱+ ۲ لا+ قی لا+ ر لا+ س = کو بطور ایک$$

مساوات درجہ دوم کے حل کیا جاسکتا ہے اگر $س = ف$ س

$$۲۲- مساوات لا^۱- ۱۸ لا^۲+ ۶ لا^۳+ ۲۸ لا^۴- ۳۲ لا+ ۸ = کی ایک اصل$$

۱۶-۲ ہے، مساوات کو حل کرو،

۲۳۔ اگر e ، b ، d ، h مساوات $la + q + r + s = 0$ کی اصلیں ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $b + d + h + (b + d + h) - a$ وغیرہ وغیرہ ہوں۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ اگر مساوات $la + q + r + s = 0$ کی دو اصلوں کا مجموعہ باقی دو اصلوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو $la + q + r + s = 0$ اور اگر دو اصلوں کا حاصل ضرب باقی دو اصلوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہو تو $la + q + r + s = 0$

۲۵۔ مساوات $la + q + r + s = 0$ کی دو اصلیں ایسی ہیں جن کا حاصل ضرب a ہے، یہ اصلیں معلوم کرو۔

۲۶۔ مساوات $la + q + r + s = 0$ کی دو اصلیں معلوم کرو جن کا حاصل جمع h ہے۔

۲۷۔ اگر مساوات $la + q + r + s = 0$ کی دو اصلیں $la + q + r + s = 0$ کی اصلیں a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ، k ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)(e + 1)(f + 1)(g + 1)(h + 1)(i + 1)(j + 1)(k + 1) = (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)(e + 1)(f + 1)(g + 1)(h + 1)(i + 1)(j + 1)(k + 1)$$

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)(e + 1)(f + 1)(g + 1)(h + 1)(i + 1)(j + 1)(k + 1)$$

۲۸۔ مساوات $la + q + r + s = 0$ کی دو اصلوں کا حاصل جمع h کے مساوی ہے۔ اس کی تشریح کرو کہ اگر اسی امر کی بنا پر مساوات کو حل کرنے کی کوشش کی جائے تو عمل ناکام رہتا ہے۔

$$۹ - اگر ۲ لا = ۱ + ۱' اور ۲ ما = ب + ب' تو$$

$$لا + ما = \sqrt{(۱ - ۲' ما)(۱ - ۲' لا)} کی قیمتیں معلوم کرو۔$$

$$۱۰ - \frac{\sqrt{\frac{۴}{۳}(۱۵ ما - ۴)} + \sqrt{\frac{۴}{۳}(۱۵ لا + ۴)}}{\sqrt{\frac{۴}{۳}(۳۵ ما - ۶)} - \sqrt{\frac{۴}{۳}(۳۵ لا + ۶)}} کی قیمت معلوم کرو$$

[آر۔ ایم۔ اے دو چ]

۱۱۔ اگر ایک کے خیالی جذر الکعب عدہ اور بہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$عدہ^۳ + بہ^۳ + عدہ' لا = -$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ کسی پانچہ تعدد میں جسکی اصل ۴ سے زیادہ ہو عدد

۱۲۴۳۲ پورا تقسیم ہو جاتا ہے ۱۱ پر اور نیز ۱۲ پر۔

۱۳۔ ۱ اور ب دونوں ایک میل کی دوڑ میں بھاگنا شروع کرتے ہیں۔

پہلی بازی میں ۱، ب کو ۱۱ گز کا وقفہ دیتا ہے اور منزل مقصود پر ۵

سکند قبل پہنچ جاتا ہے، دوسری بازی میں ۱، ب کو ۸ سکند کا

وقفہ دیتا ہے اور بالآخر ۸۸ گز پیچھے رہ جاتا ہے۔ بتاؤ کہ دونوں جداگانہ

کتنے وقت میں ایک میل بھاگ سکتے ہیں۔

$$۱۴۔ مساوات لا = ما = ۱' - ما = ۱' - ب' = ۱' - لا = ۱' - ی = ۱' - لا = ج' لا + ما$$

$$+ ی = - میں سے لا، ما، ی کو ساقط کرو۔ [آر۔ ایم۔ اے دو چ]$$

$$۱۵۔ مساوات لا + ب لا + ج ما = ب لا + ج لا + ما + لا = د کو حل کرو۔$$

۱۶۔ ایک ملاح کو ایک جگہ تک جو ۴۸ میل کے فاصلہ پر واقع ہے کشتی نیجانے

اور واپس آنے میں ۱۴ گھنٹے لگتے ہیں، نیز وہ یہ معلوم کرتا ہے کہ جتنے عرصہ میں

وہ ۴۸ میل روکے موافق جاسکتا ہے اتنے ہی عرصہ میں ۳ میل روکے خلاف

جاسکتا ہے۔ روکی رفتار دریافت کرو۔

۲۹ - مساوات ذیل کو حل کرو:-

$$۲ + ۳ = ۵، ۹ - ۷ = ۲، ۳ + ۴ = ۷، ۳ + ۴ = ۷$$

(آر ایم دوہج)

۳۰ - ایک امتحان میں ۶ پرچے دیئے گئے ہیں۔ جن میں سے دو ریاضی کے ہیں، بتاؤ کہ کتنی مختلف ترکیبوں سے پرچے تقسیم کئے جاسکتے ہیں بشرطیکہ ریاضی کے پرچے کے بعد دیگرے نہ ہوں۔

۳۱ - کتنے طریقوں سے ۵ پونڈ ۴ شلنگ ۲ پنس پرے ۱۰ سکوں میں ۱۰ کئے جاسکتے ہیں جبکہ یہ سکے مشتمل ہوں نصف کراؤن، شلنگ اور چار پنس کے سکوں پر۔

۳۲ - اگر $۳ + ۱ + ۱ + ۱$ اور $۳ + ۱ + ۱ + ۱$ میں $۳ + ۱ + ۱ + ۱$ اور $۳ + ۱ + ۱ + ۱$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

(لندن یونیورسٹی)

۳۳ - ۱، ۲، ۳ اور ۴ تینوں کے ایک کام کو ختم کرنے میں جو وقت صرف ہوتا ہے ۱ اکیلا اسی کام کو ۶ گھنٹے زیادہ میں ختم کر سکتا ہے، نیز ۲ اکیلا ایک گھنٹہ زیادہ میں اور ۳ اکیلا اس سے ۲ گھنٹے وقت میں کر سکتا ہے، بتاؤ تینوں ملکر کتنے عرصہ میں کام ختم کرتے ہیں۔

۳۴ - اگر مساواتوں $۱ + ۲ = ۳$ ، $۱ + ۲ = ۳$ ، $۱ + ۲ = ۳$ کا صرف ایک حل ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = ۱$ اور $\frac{۱}{۲} = ۱$ ، $\frac{۱}{۳} = ۱$ ۔

(ریاضی ٹائی پاس)

۳۵ - $(۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰)$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر پہلی پانچ رقمیں معلوم کرو۔

۳۶ - اگر $۳ + ۱ + ۱ + ۱$ اور $۳ + ۱ + ۱ + ۱$ کی ایک اصل دوسری اصل کے مابین کے

مساوی ہو تو ثابت کرو کہ $ق - ۳ = (۳ - ف - ۱) + ق = ۰$

(پہلوئیک کا پچا کیمبرج)

۳۷۔ مساوات لاؤ $۵ - ۱۶ - ۵ = ۵$ کو حل کرو (کوئینز کا پچا آکسفورڈ)

۱۳۸۔ ۱ کی قیمت معلوم کرو جس سے کسیر ذیل

$$\frac{۱۲ - ۱۱۹ + ۱۹ - ۱ - ۳}{۷ - ۱ - ۱۰۱ - ۲۳ - ۱ - ۱ - ۱}$$

قابل تحویل ہو جائے کسیر مذکور کو اس کی مغز ترین رقم میں لاؤ۔

(ریاضی ڈائی پاس)

۳۹۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای تقادیر حقیقی ہوں اور

$$(۱۰ ب + ج) = ۲ (ب + ج + ۱) + ۱ - ۱۲ - ۱۰ - ۱$$

تو ثابت کرو کہ $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$

۴۰۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$ کی تفصیل میں بڑی سے

(ای مینیٹ کا پچا کیمبرج)

۴۱۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$ کے حاصل جمع کو $۱۰ ب + ج$ کے حاصل جمع

سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب ۵۰۰ کے مساوی ہو اور اگر $۱۰ ب + ج$ کے فرق کو $۱۰ ب + ج$ کے فرق سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب ۴۰۰ ہو۔

۴۲۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$ کے حاصل جمع کو $۱۰ ب + ج$ کے حاصل جمع

(کرسٹ کا پچا کیمبرج)

۴۳۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$ کے حاصل جمع کو $۱۰ ب + ج$ کے حاصل جمع

۴۴۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$ کے حاصل جمع کو $۱۰ ب + ج$ کے حاصل جمع

۴۵۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$ کے حاصل جمع کو $۱۰ ب + ج$ کے حاصل جمع

۴۶۔ اگر $۱۰ ب + ج = ۱۰۱$ مای $۱۰۱ = ۱۰۱$ ی $۰ = (۱۰ ب + ج + ۱) - ۱۰۱$ کے حاصل جمع کو $۱۰ ب + ج$ کے حاصل جمع

۵۰۔ آدمیوں کی ایک جماعت کو تین قطاروں کے ایک مجموعہ مرتب کی گئی ہیں کھڑا کیا گیا اور یہ دیکھا گیا کہ اگر ۲۵ آدمی زیادہ ہوتے تو ان کو ایک ایسے ٹھوس مربع کی شکل میں کھڑا کیا جاسکتا تھا جس کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد مجموعہ مرتب کے ہر ایک ضلع میں آدمیوں کی تعداد کے جذر سے بقدر ۲۲ کے زیادہ ہوتی۔ آدمیوں کی تعداد معلوم کرو۔

۵۱۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$(1) \quad \sqrt{a^2 + (a-1)^2} + \sqrt{a^2 + (a-1)^2} = 3 \sqrt{a^2 + (a-1)^2}$$

$$(2) \quad (a-1)(a-1) = (a-1)(a-1) = (a-1)(a-1)$$

$$52 - \text{ثابت کرو کہ } \sqrt{1 + \frac{2}{4} + \frac{5 \times 2}{12 \times 4} + \frac{8 \times 5 \times 2}{18 \times 12 \times 4} + \dots} = 1$$

(سنڈنی کالج، کیمبرج)

$$53 - \sqrt{a^2 + (a-1)^2} - \sqrt{a^2 + (a-1)^2} = 1$$

(کوئینز کالج، کیمبرج)

۵۴۔ دو برتن ہیں جن میں سے ایک میں اگلیں شراب ہے اور دوسرے میں ب گلیں پانی ہر ایک برتن میں سے ج گلیں نکال کر دوسرے برتن میں منتقل کر دیئے گئے ہیں۔ یہی عمل بارہا کیا گیا ہے، اگر ج (ب + ۱) = ب تو ثابت کرو کہ پہلے عمل کے بعد ہر ایک برتن میں شراب کی مقدار وہی رہے گی۔

۵۵۔ م اور ن کا اوسط حسابی اور د اور ب کا اوسط ہندسی دونوں

$$\frac{m+n}{2} \text{ کے مساوی ہیں، م اور ن کو د اور ب کی رقوم میں}$$

دریافت کرو۔

۵۶۔ اگر a, b, c ایسے ہوں کہ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ہو اور اگر $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$ ہو تو ثابت کرو کہ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ۔

۵۷۔ اگر a, b, c ایسے ہوں کہ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ہو اور اگر $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$ ہو تو ثابت کرو کہ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ۔

۵۸۔ اگر a, b, c ایسے ہوں کہ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ہو اور اگر $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$ ہو تو ثابت کرو کہ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ۔

۵۷۔ ثابت کرو کہ اگر n بڑا ہر m سے تو

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n - 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) + 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) + \dots + 1 \times 2 + 1 = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

[اگر ٹیسٹ کا بج کی کمی نہ ہو]

۵۸۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4} \quad (1)$$

$$(1) \quad \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4} \quad (\text{سینٹ جانز کالج کی کمیٹی})$$

۵۹۔ ثابت کرو کہ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تو $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$ یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ سے

دو باہم مساوی ہونگی۔

۶۰۔ ایک قوم میں کل انخاص کی تعداد n ہے، ان میں سے a فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں، b فیصد اور m فیصد دونوں میں سے b فیصد اور m فیصد دونوں میں سے c فیصد لکھ پڑھ سکتے ہیں، بتاؤ کہ اس قوم میں کتنے مرد اور کتنی عورتیں ہیں۔

$$61. \text{ اگر } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ثابت کرو کہ } \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} \text{ یا } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$= \frac{a}{b} \left(\frac{a+b}{c+d} \right)$$

[ایمپول کا بج کی کمی نہ ہو]

۶۲۔ ثابت کرو کہ $(1 - \frac{a}{b}) \times (1 - \frac{c}{d}) = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{ac}{bd}$

$$63. \text{ مساوات } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \text{ کو حل کرو۔}$$

(لندن یونیورسٹی)

۶۴۔ (۱) سلسلہ حسابیہ (۲) سلسلہ موسیقیہ علوم کرو۔ جن میں سے

ہر ایک کی پہلی اور آخری رقمیں بالترتیب ۱ اور ۵ ہوں ثابت کرو کہ پہلے سلسلہ کی ۲۵ ویں رقم اور دوسرے سلسلہ کی (ن - ۱ + ۱) ویں رقم کا حاصل ضرب ۱ ب ہے۔

$$۶۵ - \text{اگر مساوات (۱- ق) + (۱+ ق) لا + ف (۱+ ق) لا + ق (۱- ق) = \frac{۱}{۲} =$$

کی اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ف = ۴ ق (آر ایم اے، دو ج)

$$۶۶ - \text{اگر لا + ب} = ۷ \text{ ب تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{لوک} = \left\{ \frac{۱}{۲} (۱ + ب) \right\} = \frac{۱}{۲} (\text{لوک} + ۱ + \text{لوک} ب) \quad (\text{کوئیز کالج - آکسفورڈ})$$

$$۶۷ - \text{اگر ن ایک اصل ہو مساوات}$$

$$لا (۱ - ج) - لا (۱ + ج) - (۱ + ج) = ۰$$

کی، اور اگر ۱ اور ج کے درمیان ن واسطہ موسیقی درج کئے جائیں تو ثابت کرو کہ پہلے اور آخری واسطوں کا فرق ج (۱ - ج) کے مساوی ہوگا۔ (دوا و صم کالج - آکسفورڈ)

$$۶۸ - \text{اگر ج : بیٹم} = ۱۶ : ۵۷ \text{ تو ن کی قیمت معلوم کرو۔}$$

$$۶۹ - \text{ایک شخص} \frac{۶}{۱۰} \text{ فیصدی والے سرکاری قرضہ میں کچھ رقم نکالتا ہے، اگر}$$

قیمت میں بونڈ کم ہوتی تو اسے اپنی رقم پر $\frac{۱}{۱۰}$ فیصد سود زیادہ ملتا۔ بتاؤ کہ قرضہ کس قیمت پر دیا گیا ہے۔

$$۷۰ - \text{مساوات} \{ (لا + ۱ + ۱) - (۱ + ۱ + ۱) \} \{ (۱ + ۱ + ۱) - (۱ + ۱ + ۱) \} =$$

$$۳ = \{ (۱ + ۱ + ۱) - (۱ + ۱ + ۱) \} \{ (۱ + ۱ + ۱) - (۱ + ۱ + ۱) \}$$

(مرٹن کالج - آکسفورڈ)

$$۷۱ - \text{مساواتوں} لا + لا + ب = ۰ \text{ اور لا + لا + ل (لا + لا) + م = ۰}$$

میں سے لا کو سا قط کرنے سے جو مساوات درجہ دوم یا میں حاصل ہوتی ہے اگر
اس مساوات کی اصلیں وہی ہوں جو لا میں ابتدائی مساوات درجہ دوم کی ہیں
تو ثابت کرو کہ $۲ = ۱$ ل اور $ب = م$ یا $ب + م = ۱$ ل

(آیہ ایم، اسے دو لچ)

۲ - اگر یہ معلوم ہو کہ لو کہ $۲ = ۳ - ۱۰۳$ ۵ اور لو کہ $۳ = ۱۲ - ۷۷$ ۴ تو
ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$(۱) \quad \frac{۲۹}{۱۰} = \frac{۷۷}{۱۰} + \frac{۷۷}{۱۰} (۲) \quad \frac{۷۷}{۱۰} - \frac{۷۷}{۱۰} = ۰$$

۳ - دو اعداد معلوم کرو جن کا حاصل جمع ۹ ہو اور جن کی چوتھی قوتوں کا حاصل جمع
۲۴۱۷ ہو۔

۴ - ۱۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنا شروع کرتا ہے۔ اُس کے روانہ ہونے کے
۳ گھنٹے بعد اُس کو پکڑنے کے لئے نکلتا ہے اور پہلے گھنٹے میں $\frac{۱}{۲}$ میل
چلتا ہے، دوسرے گھنٹے میں $\frac{۳}{۴}$ میل، تیسرے میں ۵ میل اور اسی طرح
ہر گھنٹے میں $\frac{۱}{۲}$ میل کے حساب سے زیادہ تیز چلتا ہے، بتاؤ کہ وہ کتنے گھنٹوں
میں اُس کو پکڑ لیگا۔

۵ - ثابت کرو کہ $(۱ + ۳ + ۵ + \dots + ۲۱)$ کے عین بعد جو صحیح عدد آتا ہے اُس میں جڑ ضربی
۱۲۲ شامل ہوتا ہے۔

۶ - طبعی اعداد کے سلسلہ کو ذیل کے گرد ہوں میں

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، علیٰ ہذا القیاس

تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ 'ن' دیں گروہ میں جو اعداد ہونگے اُن کا مجموعہ
(ن - ۱) + ۳ + ۵ کے مساوی ہوگا۔

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \dots$$

کی کن رتوں کا مجموعہ ۱ - $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۹} \times \frac{۱}{۱۰} \times \dots$ کے مساوی ہے
۱۱، ایم، اسے دو لچ

۸۴۔ کتنے طریقوں سے ۲۰ شنک ۵ آدمیوں میں سرِ طرح تقسیم ہو سکتے ہیں کہ کسی آدمی کو کم سے کم نہ ملیں۔
 ۸۵۔ ایک شخص کی یہ خواہش ہے کہ اُس کی دونوں نابالغ لڑکیوں کو سن بونہا پر پہنچنے پر مساوی رقم ملیں۔ اس غرض کے لئے اُس نے یہ وصیت کی کہ بڑی لڑکی کو ایک رقم کا جو اُس نے اپنی وفات کے وقت ۸۸ پر ۳ فیصدی والے اسٹاک میں جمع کی اُس کا کل سود ملے اور چھوٹی لڑکی کو اس رقم کا کل سود ملے جو پہلی رقم سے بقدر ۳۵۰۰ پونڈ کم ہے اور ۶۳ پر ۳ فیصدی فی سال والے اسٹاک میں اُسی وقت جمع کی گئی ہے اگر ان لڑکیوں کی عمریں اُن کے باپ کی وفات کے وقت بالترتیب ۱۷ اور ۱۴ سال کی ہوں تو بتاؤ کہ دونوں صورتوں میں کتنی رقم جمع کی گئی ہے اور ہر ایک لڑکی کو کتنی رقم ملے گی۔

۸۶۔ ۷ کے پیمانہ میں ایک عدد تین ہندسوں پر مشتمل ہے، اگر اسی عدد کو ۹ کے پیمانہ میں لکھا جائے تو اس کے عدد بلحاظ ترتیب الٹ جاتے ہیں، بتاؤ کہ وہ کونسا عدد ہے۔
 ۸۷۔ اگر کسی سلسلہ حسابیہ کی مرقموں کا حاصل جمع بعد کی نرقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو اور نیز بعد کی نرقموں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right) = (m+p)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)$$

(سینٹ جانز کالج۔ کیمبرج)

۸۸۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{(1-a)^2} + \frac{1}{(1-b)^2} + \frac{1}{(1-c)^2} = \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{1}{(1-b)^2} + \frac{1}{(1-c)^2}$$

[آر۔ ایم۔ اے۔ ویلج]

۸۹۔ اگر م منفی یا مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \dots$
 $(+ (2-n) < 1 + 2$
 (ایمینول کالج۔ کیمبرج)

۹۰۔ اگر ذیل کی تین مساواتوں

$$\text{لا} - \text{ف} + \text{ق} = ۰, \text{لا} - \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} = ۰, \text{لا} - \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} = ۰$$

میں ہر دو مساواتوں کے زوج کی ایک اصل مشترک ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف} + \text{ف} + \text{ف} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} = ۰ \quad (۱) \quad (۲) \quad (۳) \quad (۴) \quad (۵) \quad (۶)$$

۹۱۔ وارہ ب دونوں ایک ہی مسئلہ پر مختلف اوقات میں ایک ہی شرح رفتار سے ہٹنگڈن سے لنڈن کی طرف روانہ ہوئے۔ لنڈن سے ۵۰ میل پہلی پتھر پر ابطنوں کے ایک جھنڈے سے جا ملا جو دو گھنٹے میں ٹین میل کی رفتار سے جا رہا تھا اور اس کے دو گھنٹے بعد ایک گاڑی سے ملا جو ۹ میل کی رفتار سے جا رہی تھی۔ ب ابطنوں کے اسی جھنڈے سے ۴۵ میل پہلی پتھر پر ملا اور ۳۱ میل پہلی پتھر پر پہنچنے کے عین ۴۰ منٹ پہلے گاڑی کو ملا۔ بتاؤ کہ جب لنڈن پہنچ گیا تو ب اس وقت کہاں تھا۔
(سینٹ جانز کالج، کیمبرج)

۹۲۔ اگر $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۰$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۰ \quad \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۰ \quad \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۰ \quad \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۰$$

(آر۔ ایم۔ ایس۔ ورلڈ)

۹۳۔ ایک سلسلہ حسابیہ، سلسلہ منہاسیہ، سلسلہ موسیقیہ کی پہلی دوریں وارہ ب ہیں، ثابت کرو کہ ان کی $(ن + ۲)$ ویں رجحیں سلسلہ منہاسیہ میں ہوں گی

$$\text{اگر } \frac{\text{ب}^{۲+۵۲} - \text{ا}^{۲+۵۲}}{\text{ن} + ۱} = \frac{\text{ب}^{۲+۵۲} - \text{ا}^{۲+۵۲}}{\text{ن}}$$

(ریاضی ٹرائی پاس)

$$۹۴۔ \text{ثابت کرو کہ اگر } \frac{\text{لا}}{(\text{ا} - \text{ب})} = \frac{\text{لا}}{(\text{ا} - \text{ب})}$$

کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلا جائے تو لان کا سر

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} \times \frac{1}{b^2} \text{ ہوگا اور } \frac{(1+n^2)}{(1-n^2)} \text{ کی تفصیل میں لان کا سر}$$

$$^{52} - (n^2 + n + 2) \text{ ہوگا۔ (اینیول کلج - کبرج)}$$

$$95 - \text{مساداتوں } \frac{1}{2} \sqrt{1-a} + \frac{1}{2} \sqrt{1+a} = \frac{1-a}{1+a}$$

$$\text{اور } 15 : 33 = 1 : 2$$

$$\text{کو حل کرو۔ (سینٹ جانز کلج - کبرج)}$$

$$94 - \text{جلہ } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \text{ کی قیمت درجہ دوم کے جذریہم کی شکل میں}$$

$$\text{معلوم کرو۔ (آر، ایم، اے، ویج)}$$

$$96 - \text{ثابت کرو کہ ہر صحیح عدد کا کعب دوم ہوں کے فرق کی شکل میں لکھا جاسکتا}$$

$$\text{ہے اور کسی طاق عدد کا کعب دوم ہوں کے فرق کی شکل میں دو طرح سے لکھا جاسکتا}$$

$$\text{ہے۔ نیز کسی دو متصل صحیح عددوں کے کعبوں کا فرق دوم ہوں کے فرق کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ (جیسس کلج، کبرج)}$$

$$98 - \text{ذیل کے سلسلہ لا متناہی کی قیمت معلوم کرو۔ (اینیول کلج - کبرج)}$$

$$99 - \text{اگر } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \dots$$

$$\text{اور } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \dots$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \dots$$

$$100 - \text{ذیل کے سلسلہ متوالی کا تعامل تکوینی، ن رقوم کا حاصل جمع امین دیں رقم معلوم کرو۔}$$

$$1 + 5\lambda + 4\lambda^2 + 14\lambda^3 + 31\lambda^4 + \dots$$

۱۰۱۔ اگر 'ا' ب 'ج' سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو

$$(1) \quad 2 < \frac{ب + ج}{ب - ج} + \frac{ب + 1}{ب - 1}$$

$$(2) \quad ب^2(ج - 1) = 2 \{ ج^2(ب - 1) + 1(ج - ب) \}$$

(پیمبرک کالج، کمبرج)

۱۰۲۔ اگر 'ا' ب 'ج' تمام مقادیر حقیقی ہوں اور لا^۲ - ۳ ب^۲ لا + ۲ ج^۲ پورا تقسیم ہو جائے لا۔ اور نیز لا - ب پر تو ثابت کرو کہ لا = ب = ج ! لا = ۲ - ب

(جیسس کالج - آکسفورڈ)

۱۰۳۔ ثابت کرو کہ تین متصل طاق عددوں کے مربعوں کے حاصل جمع میں جب اکا اضافہ کر دیا جائے تو مجموعہ ۱۲ پر پورا تقسیم ہو جاتا ہے لیکن ۲۲ پر تقسیم نہیں ہوتا۔

۱۰۴۔ ثابت کرو کہ اگر 'ا' منفی ہو تو لا^۲ + ۲ ب^۲ لا + ج^۲ کی بڑی سے بڑی قیمت اور اگر 'ا' مثبت ہو تو چھوٹی سے چھوٹی قیمت $\frac{ب^2 - ج^2}{1}$ ہوگی۔

اگر لا^۴ + ما^۴ + ی^۴ + ما^۴ + ی^۴ لا^۲ + لا^۲ ما^۲ = ۲ لا^۲ ما^۲ (لا + ما + ی) اور لا، ما، ی سب حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ لا = ما = ی (سینٹ جانز کالج کمبرج)

۱۰۵۔ ثابت کرو کہ $\frac{1 - 1 - 1}{2} - \frac{1 - 1}{2}$ کی تفصیل یہ ہے

$$\dots + \frac{لا^5}{2} \times \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} + \frac{لا^4}{4} \times \frac{3 \times 1}{2 \times 2} + \frac{لا^3}{2}$$

۱۰۶۔ اگر 'ا' یہ مساواتوں

$$لا + ف لا + ق = 0, لا^2 + ف^2 لا + ق^2 = 0$$

کی اصلیں ہوں جہاں ن کوئی جُفت صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{c}{p} = \frac{c}{q} \text{ مساوات لا } + 1 + (1 + \frac{c}{p}) = 0 \text{ کی اصلیں ہیں۔}$$

[پہرے کا کالج - کیمبرج]

$$10.6 - \text{لا متناہی کسٹریس } 1 + \frac{b}{1+p} + \frac{b}{1+p} + \frac{b}{1+p} + \dots$$

$$\text{اور } 1 + \frac{c}{1+q} + \frac{c}{1+q} + \frac{c}{1+q} + \dots$$

کے مربوں کا فرق معلوم کرو۔

[کرائسٹ کالج کیمبرج]

10.8 - ایک خالص رقم چند آدمیوں میں تقسیم کی گئی ہے، دوسرے آدمی کو پہلے آدمی سے ایک شلنگ زیادہ ملتا ہے، تیسرے آدمی کو دوسرے سے 2 شلنگ زیادہ ملے، چوتھے کو تیسرے سے 3 شلنگ زیادہ اور علی بن القیاس، اگر پہلے آدمی کو ایک شلنگ ملے اور آخری آدمی کو 3 پونڈ 2 شلنگ تو آدمیوں کی تعداد اور رقم کی مقدار معلوم کرو۔

10.9 - معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(1) \quad 2 = \frac{a+b}{a+b} + \frac{c}{c} = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(2) \quad \frac{3}{3} = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 1 + 1 + 1 = 3$$

11. - اگر a اور b مثبت اور غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(a-b)^2 < (a+b)^2$$

[سینٹ کیتھرین کالج کیمبرج]

111 - کوکسٹر سلسل کی شکل میں لاؤ اور اس سے لاؤ اور م کی دو جھوٹی

سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو جو مساوات ۳۹۶ لا - ۳۹۶ = ۱۲ کو پورا کریں۔
 ۱۱۲۔ ب اور ج ملکہ ایک کام کو جتنے دن میں ختم کرتے ہیں اس سے م گئے
 وقت میں و اکیلا اسی کام کو کر سکتا ہے ، و اور ج ملکہ اسی کام کو جتنے دنوں
 میں ختم کر سکتے ہیں ب اکیلا اس سے ن گئے وقت میں اسے کر سکتا ہے ، اسی طرح سے
 و اور ب مل کر اس کام کو جتنے دنوں میں ختم کر سکتے ہیں اس سے ف گئے وقت
 میں ج اکیلا اس کام کو ختم کر لیتا ہے۔ ثابت کر دو کہ و ب اور ج کو اس کام
 کے جدا گانہ ختم کرنے میں جتنے دن لگتے ہیں وہ اس تناسب م + ن : ۱ + ۱ :

$$ف + ۱ میں ہیں۔$$

$$نیز ثابت کر دو کہ \frac{م}{۱+م} + \frac{ن}{۱+ن} + \frac{ف}{۱+ف} = ۲$$

(آر ایم اے۔ ویرجیا)

۱۱۳۔ ایک آبی شفا خانہ کے اخراجات کا کچھ حصہ مستقل ہے اور کچھ حصہ اس کے
 میٹروں کی تعداد پر موقوف ہے ، ہر ایک میٹرم ۶ پونڈ سالانہ ادا کرتا ہے اگر میٹروں
 کی تعداد ۵۰ ہو تو سالانہ فائدہ ۹ پونڈ فی کس ہوتا ہے ، لیکن اگر تعداد ۶۰ ہو تو
 فائدہ ۱۰ پونڈ ۱۳ شلنگ ۴ پیس فی کس ہوتا ہے ، اگر میٹروں کی تعداد ۸۰ ہو تو ہواؤ
 کرنی کس کتنا فائدہ ہوگا۔

۱۱۴۔ اگر لا = ۲ لا - ۱ اور لا بڑا نہ ہوا سے تو ثابت کر دو کہ

$$۳(لا^۳ + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا}{۳} + \dots) = ۱ + \frac{لا}{۲} + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} + \dots$$

(پیشروں۔ کیمرج)

۱۱۵۔ اگر \frac{لا}{۱-۲} = \frac{ما}{۱-۳} = \frac{۱}{ب} اور لا ما ج = ۱ تو ثابت کر دو کہ

جہاں و اور ج غیر مساوی ہوں تو

$$(۱ + ج) - (ب + ج) = - اور (۱ + ج) - ب = -$$

(سینٹ جونز کالج، کیمبرج)

۱۲۱۔ $\frac{2+3}{4+3+2}$ کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

۱۲۲۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $1 + 2 = 3 + 4$

(۲) $3 + 4 = 5 + 6 = 7 + 8 = 9 + 10$

۱۲۳۔ ایک جوتھائی کی تفصیل میں ۱، ۱، ۱، ۱ چار متصل سرہیں ثابت کرو کہ

(کوئینز کالج - کیمبرج)

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+3} = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{2+4}$$

۱۲۴۔ $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{(1+2)(2+3)(3+4)(4+5)(5+6)(6+7)(7+8)}$ کو کسوچڑی میں تحلیل کرو، نیز اگر

$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{(1+2)(2+3)(3+4)(4+5)(5+6)(6+7)(7+8)}$ کو لاکھ سودی قوتوں میں پھیلا یا جائے تو پھیلاؤ کی عام رقم معلوم کرو۔

۱۲۵۔ متوالی سلسلہ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$

میں پہلے ربط درجہ دوم کا ایک جملہ ہے، چوتھی رقم کا نامعلوم سر اور ربط کا پانچ درجہ درجہ دوم کا ایک جملہ ہے۔

(آر، ایم، اے ویج)

۱۲۶۔ اگر $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$ اور اگر

$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20} = 10.5$ اور $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20} = 10.5$

تو ثابت کرو کہ $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$ اور $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 210$

(ڈرائی پاس)

۱۲۷۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$x - 12 = 9 - 6y \quad / \quad y - 2x = 4 + 6y \quad (1)$$

(۲) (۱۱) = (ب ا) لک پ . ب کو لا = لک

۱۲۸۔ ذیل کے جملات کی انتہائی قیمتی معلومات معلوم کرو:-

$$(1) \sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+y'^2} \rightarrow \infty \text{ جبکہ } y \rightarrow \infty$$

$$\frac{\sqrt{3}r - \sqrt{2}r + 1}{\sqrt{2}r - 2 + \sqrt{3}r} \quad (2)$$

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۲۹۔ دو صدوں کا حاصل ضرب ۱۹۲ ہے اور ان عددوں کے جو عباد اعظم اور

ذوالضعاف اقل ہیں اُن کے اوسط حسابیہ اور اوسط موسیقیہ کا خارج قسمت $\frac{25}{28}$ ہے
 پچاسان عددوں کو معلوم کرو۔

پہلے ان عددوں کو معلوم کرو۔

(آر ایچ، اے۔ ویج)

۱۳۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\sqrt{r^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^2} = \frac{r^2 + y^2}{r^2}$$

$$J = \sqrt{b-1} \sqrt{c} + \sqrt{c-1} \sqrt{b} \quad (2)$$

$$b = \frac{\sqrt{5-1}}{2} + \frac{\sqrt{5-1}}{2} i$$

$$C = \sqrt{25-1} \sqrt{b} + \sqrt{16-1} \sqrt{a}$$

۱۳۱۔ ثابت کرو کہ لا تنہای تک فیل کے سلسلہ

..... کا حاصل جیج $-\frac{5 \times 3 \times 1}{5 \times 3} + \frac{3 \times 1}{3 \times 1} - \frac{1}{1 \times 1}$

۱۳۲۔ تین ہندسوں کا ایک عدد اس قسم کا ہے کہ ہندسوں کی ترتیب الٹ دینے سے اس عدد کی قیمت دوگنی ہو جاتی ہے، ثابت کرو پہلے اور آخری ہندسہ سے جو عدد بنتا ہے اس پر بھی یہی امر صادق آئیگا۔ نیز ثابت کرو کہ ایسا عدد چند دس کے ہر تین پیمانوں میں سے صرف ایک میں حاصل ہو سکتا ہے۔

[پانچ ٹرائی پاس]

$$۱۳۳ - \frac{۱ + ۲ لا}{(۱ - لا)(۱ - لا)} \text{ اور } ۱ - لا + لا کے حاصل ضرب میں لا اور لا$$

 کے سر معلوم کرو۔ (آر ایم، اے دو لچ)

۱۳۴۔ ایک خریدار بازار کے سامنے زمین کا ایک ٹکڑا خریدنا چاہتا ہے مگر اسے شکل کی شکل کو ایک ایسا مستطیل ہونا چاہیے کہ اس کی پیشانی کے طول نہایتین گنا اور اس کی گہرائی کا دو گنا ہو، بتاؤ کہ وہ زیادہ سے زیادہ کتنے مربع گز زمین لے سکتا ہے۔ (لنڈن یونیورسٹی)

۱۳۵۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} & (۱ + ب + ج + د) + (۱ + ب - ج - د) + (۱ - ب + ج - د) + (۱ - ب - ج + د) \\ & - (۱ + ب + ج - د) - (۱ + ب - ج + د) - (۱ - ب + ج + د) - (۱ - ب - ج - د) \\ & - (۱ + ب + ج + د) = ۱۹۲ \text{ و ب ج د} \quad (\text{ٹرنٹی کلج، اکبرج}) \end{aligned}$$

۱۳۶۔ و ب ج کی ایسی قیمتیں معلوم کرو کہ ہر دو جملات

$$لا + لا + ب لا + ج لا + ۱ \text{ اور } لا + ۲ لا + ۲ ب لا + ج لا + ۱$$

مربع کامل ہوں۔ (لنڈن یونیورسٹی)

۱۳۷۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱) \quad ۳ = \frac{\sqrt{۱۰ + لا} - \sqrt{۱۰ - لا}}{\sqrt{۱۰ + لا} + \sqrt{۱۰ - لا}} \quad , \quad لا + لا = ۱۰$$

۱۴۴۔ ذیل کی مساواتوں میں سے لا، ما، می کو ساظ کرو:-

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{می} = \text{وا} \quad ; \quad \text{لا} + \text{ما} + \text{می} = \text{ب}$$

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{می} = \text{ج} \quad \text{لا} + \text{ما} + \text{می} = \text{د}$$

اور ثابت کرو کہ اگر لا، ما، می محدود اور تعداداً غیر مساوی ہوں تو ب، د کے مساوی نہیں ہو سکتا۔
(آر، ایم، اے دو بچ)

۱۴۵۔ مساوات ۳ (لا + ۸) + ۱۶ (وا + ۱) = ۰ کی سب اہلیں غیر مساوی نہیں ہیں، اصلوں کو معلوم کرو۔

۱۴۶۔ ایک مسافر ایک خاص مقام سے روانہ ہو کر پہلے دن ایک میل چلتا ہے، دوسرے دن ۳ میل، تیسرے دن ۵ میل اور علیٰ ذہن القیاس ہر روز گزشتہ دن کی نسبت ۲ میل زیادہ چلتا ہے، اُس کے روانہ ہونے کے تین دن بعد ایک آدمی روانہ ہوتا ہے جو پہلے دن ۱۲ میل چلتا ہے، دوسرے دن ۱۳ میل اور علیٰ ذہن القیاس بتاؤ کہ دوسرا آدمی پہلے آدمی کو کتنے دن میں پکڑے گا۔ دوسرے جواب کی تشریح کرو۔

۱۴۷۔ سلسلہ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ کی قیمت معلوم کرو۔

۱۴۸۔ مساوات لا + ۳ وا + ۳ (ب - ج) لا + وا + با + ج

۳ - وب + ج = ۰ کو حل کرو (انڈیا سول سروس)

۱۴۹۔ اگر ن کوئی عدد منفرد ہو جو نہ کو پورا تقسیم کرے، نہ ب کو اور نہ وا + ب کو

تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{ن} - \frac{1}{ب} - \frac{1}{وا + ب} + \frac{1}{ن - ب} - \dots = ۰$ (سینٹ جانز کالج - کیرج)

بقدر ا کے ن کے ضعف سے بنتا ہے۔

۱۵۰۔ ایک سلسلہ کا حاصل جمع لاتنا ہی تک (۱ - وب لا) (۱ - وا لا) (۱ - لا وا)

(۱ - ب لا) ہے، اس سلسلہ کی ن ویں رقم اور ن رقموں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

(یکسورڈ ۳۰۷)

۱۵۱۔ اگر a, b, c مساوات $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ کی اصلیںہوں تو وہ مساوات معلوم کرو۔ جسکی اصلیں $\frac{a^2 + b^2}{c}, \frac{b^2 + c^2}{a}, \frac{c^2 + a^2}{b}$ ہوں۔

(کلیہ کالج - کیمبرج)

۱۵۲۔ ثابت کرو کہ $(a^2 + b^2 + c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)^2$ $= 18(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)$

(کلیہ کالج - کیمبرج)

۱۵۳۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(1) \quad a^2 - 3a + 1 = 0 \quad \text{کا } \sqrt{13} \text{ کے طریقے سے}$$

$$(2) \quad a^2 - 3a + 1 = 0 \quad \text{جسکی اصلیں}$$

۱۵۴۔ ایک شخص کی فی گھنٹہ کام کرنے کی مقدار اس کی ایک گھنٹہ کی تنخواہ کے برابر اس تناسب سے اور جتنے گھنٹے فی روز کام کرتا ہے اس کے مزدور کے بالعکس تناسب سے ہو۔ ایک کام کوئی دن ۹ گھنٹے بحساب ایک سنگ فی گھنٹہ کام کر کے ۶ دن میں ختم کر دیتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ اسی کام کو ۱۶ گھنٹے فی روز بحساب اشنگ ۶ پنس فی گھنٹہ کام کر کے کتنے دنوں میں ختم کر سکیگا۔

$$155 - \text{اگر سلسلہ } 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots \text{ کی } n \text{ رقمیں}$$

$$\text{کا حاصل جمع } n \text{ سے تعبیر ہو اور سلسلہ } \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \dots \text{ کی } n \text{ رقمیں کا حاصل جمع}$$

$$+ \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \dots$$

ص سے تو ثابت کرو ۱۸ ج ص ۱۰ ج ۲ = ۲۰ (۳۰ ڈیمن کالج - ایکسورڈ)

۱۵۶۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو :-

$$(1) \quad 5 = (1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)(1-8)(1-9)(1-10)(1-11)(1-12)(1-13)(1-14)(1-15)(1-16)(1-17)(1-18)(1-19)(1-20)$$

$$(2) \quad \frac{(5-3)(3+3)}{(4-3)(4+3)} \cdot \frac{1}{9} + \frac{(3-3)(1+3)}{(2-3)(2+3)} \cdot \frac{1}{5}$$

$$(3) \quad \frac{92}{585} = \frac{(4-3)(5+3)}{(8-3)(4+3)} \cdot \frac{2}{13}$$

۱۵۷۔ ایک سال کے شروع میں ایک مکان کی قیمت ۲۵۰ پونڈ ہے لیکن وقت کی بربادی کی وجہ سے ہر سال اس کی قیمت شروع سال کی قیمت کا ۱۰ فی صدی گر جاتی ہے۔ بتاؤ کہ کتنے سالوں کے بعد اس کی قیمت ۲۵ پونڈ سے کم ہو جائیگی۔ معلوم ہے کہ $2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 = 1385120$ ثابت کرو کہ ذیل کے لاتنا ہی سہل ہے

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \dots$$

مساوی ہیں - (پیشہ دوس - کیمبرج)

۱۵۹۔ ذیل کی مساوات متوازن کو ثابت کرو -

$$\left\{ \dots + \frac{(a-b)(c-d)}{e-f} - \frac{(a-b)(c-d)}{e-f} + \frac{a}{e} - 1 \right\}$$

$$\left\{ \dots + \frac{(a+b)(c+d)}{e-f} + \frac{(a+b)(c+d)}{e-f} + \frac{a}{e} + 1 \right\}$$

$$1 = \frac{a^2}{e^2} - \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2)}{e^2-f^2} + \frac{(a^2-b^2)(c^2-d^2)}{e^2-f^2} + \frac{a^2}{e^2} + \dots$$

(ٹرنٹی کالج - کیمبرج)

۱۶۰۔ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو جو ایک سیدہ براہیوں ثابت کر دے کہ

$$ن^۵ - ۵ن^۴ + ۱۰ن^۳ - ۱۰ن^۲ + ۵ن - ۱$$

۱۲۰ کا منصف ہے۔

(۱) صحت کا لچ۔ (کسفر ۱۰)

۱۶۱۔ ایک کام کے کرنے کے لئے چند آدمی بلائے گئے۔ اگر وہ سب ایک ساتھ کام شروع کر لیں تو ۲۴ گھنٹے میں کام ختم ہو جاتا ہے، لیکن وہ ایک ساتھ شروع کرنے کی بجائے مساوی وقفوں کے بعد شروع کرتے ہیں حتیٰ کہ سب آدمی کام پر لگ جاتے ہیں اور پھر کام ختم کر دیتے ہیں، اگر ہر ایک کی مزدوری اس کے کام کے متناسب ہو اور پہلے آدمی کو آخری آدمی کی نسبت ۱۱ گھنٹی مزدوری ملے تو بتاؤ کہ کتنے عرصہ میں کام ختم ہوا۔

۱۶۲۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کر دے۔

$$(۱) \frac{۳-۲}{۳-۱} = \frac{۳-۱}{۳-۲} = \frac{۳-۱}{۳-۲}$$

$$(۲) ۱ + ۲ - ۳ = (۱ + ۲) - ۳$$

$$۱ + ۲ - ۳ = (۱ + ۲) - ۳$$

$$۱ + ۲ - ۳ = (۱ + ۲) - ۳$$

(۱) صحت کا لچ۔ (کسفر ۱۰)

۱۶۳۔ مساوات ذیل کو حل کر دے

$$(۱) (۱-۲) (۲-۳) (۳-۴) (۴-۵) (۵-۶) (۶-۷) (۷-۸) (۸-۹) (۹-۱۰)$$

$$(۲) (۱-۲) (۲-۳) (۳-۴) (۴-۵) (۵-۶) (۶-۷) (۷-۸) (۸-۹) (۹-۱۰)$$

$$(۳) (۱-۲) (۲-۳) (۳-۴) (۴-۵) (۵-۶) (۶-۷) (۷-۸) (۸-۹) (۹-۱۰)$$

۱۶۴۔ سلاسل ذیل کو جمع کر دے۔

$$(۱) ۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۳ \times ۴ \times ۵ + ۴ \times ۵ \times ۶ + ۵ \times ۶ \times ۷ + ۶ \times ۷ \times ۸ + ۷ \times ۸ \times ۹ + ۸ \times ۹ \times ۱۰$$

$$(۲) \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \dots \dots \dots \text{تکالافتا ہی}$$

۱۶۵۔ اگر (ا، ب، ج، د) چار مثبت غیر مساوی متعاقب ہوں اور $s = ا$

$$+ ب + ج + د \text{ تو ثابت کرو کہ } (س-ا)(س-ب)(س-ج)(س-د)$$

(ریٹھرباؤس، کیمبرج)

< ۸۱ ا ب ج د

۱۶۶۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

$$(۱) \sqrt{ا+ب} + \sqrt{ا-ب} = \sqrt{ا+ج} + \sqrt{ا-ج} \quad \sqrt{ا+د} + \sqrt{ا-د} = \sqrt{ا+س} + \sqrt{ا-س}$$

$$(۲) لا+ما+ی = لا'+ما'+ی' = \frac{1}{p} (لا''+ما''+ی'') = ۳$$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۶۷۔ مساواتوں ل لا+م+ما+ن ی = م لا+ن ما+ل ی = ن لا+ل ما

$$+ م ی = ک^۲ (ل^۲ + م^۲ + ن^۲) = ا^۲ \text{ میں ل، م، ن کو ساقط کرو۔}$$

۱۶۸۔ مختصراً کرو $\frac{ا(ب+ج-ا) + (ب+ج-ا) + \dots + (ب+ج-ا) + (ب+ج-ا)}{ا(ب+ج-ا) + (ب+ج-ا) + \dots + (ب+ج-ا) + (ب+ج-ا)}$

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۶۹۔ ثابت کرو کہ جو

$$(لا-ما)(ما-ی) + (ما-ی-لا) + (ی-لا-ما) - ۳(لا-ما)(ما-ی)(ی-لا) = لا(ما)$$

(لنڈن یونیورسٹی)

مرتبہ کامل ہے، اس کا جذر معلوم کرو۔

۱۷۰۔ ا، ب، ج، تین مقام ہیں، ایک شخص ا سے ب تک پیدل چلتا ہے، ب سے ج تک گاڑی میں جاتا ہے اور ج سے ا تک گھوڑے پر جاتا ہے، اس طرح سے وہ اپنا سفر $\frac{1}{۱۵}$ گھنٹے میں ختم کر لیتا ہے، اگر وہ ا سے ب تک گاڑی میں جائے ب سے ج تک گھوڑے پر جائے اور ج سے ا تک

پیدل چلے تو ۱۲ گھنٹے میں سفر طے ہو وہ کل سفر کو پیدل ۲۲ گھنٹے میں گھوڑے پر
 $\frac{1}{4}$ ۸ گھنٹے میں اور گاڑی پر ۱۱ گھنٹے میں طے کر سکتا ہے۔ نیز ایک
 میل پیدل، ایک میل گھوڑے پر اور ایک میل گاڑی پر سفر کرنے میں کل نصف
 گھنٹہ صرف ہوتا ہے اس کے سفر کرنے کی ترجیح اور ان مساوات کے وسیان
 حاصل معلوم کرو۔

۱۷۱۔ ثابت کرو کہ $x^2 - 4x + 13$ - ۸ x پر تقسیم ہو سکتا ہے ۸۰۰
 پر جہاں x کوئی مثبت صحیح عدد ہے جو ۳ سے کم نہیں ہے۔
 ۱۷۲۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(1) \sqrt{12 + 11x + 10x^2} + \sqrt{12 + 11x + 10x^2} = 23$$

$$(2) \frac{(x-1)(y-1)}{x-y} = \frac{(y-1)(z-1)}{y-z} = \frac{(z-1)(x-1)}{z-x} = \frac{(x-1)(y-1)}{x-y} = \frac{(y-1)(z-1)}{y-z} = \frac{(z-1)(x-1)}{z-x}$$

۱۷۳۔ اگر n مثبت غیر مساوی مقادیر a, b, c, \dots کا حاصل جمع s

$$\frac{s}{a} + \frac{s}{b} + \frac{s}{c} + \dots < \frac{s}{n}$$

(ریاضی ثانی پاس)

۱۷۴۔ ایک سوداگر نے کچھ مقدار کپاس کی خریدی، پھر اس کپاس کا تیل سے
 تبادلو کر لیا اور بعد ازاں تیل کو فروخت کر ڈالا۔ اُسے معلوم ہوا کہ کپاس کا وزن
 ہندو ڈویوٹوں میں، تیل کے اُن گیلنوں کی تعداد جو فی ہندو ڈویوٹ کپاس کے
 تبادلو میں آس کو لی اور تیل کی قیمت فروخت فی گیلن شلنگوں میں تینوں ایک
 ہندو ڈویوٹ ہندسیہ میں ہیں۔ نیز اُس نے یہ محسوب کیا کہ اگر اُسے ایک ہندو ڈویوٹ
 کپاس اور ملتی اور ہر ہندو ڈویوٹ کپاس کے تبادلو میں ایک گیلن تیل زیادہ ملتا اور
 ہر گیلن تیل کی قیمت فروخت ایک شلنگ زیادہ ہوتی تو اُس کو کل ۵۰۸ روپے
 و شلنگ زیادہ ملتے۔ لیکن اگر اُس کو ایک ہندو ڈویوٹ کپاس کم ملتی اور ہر ہندو ڈویوٹ
 کپاس پر ایک گیلن تیل کم ملتا اور ہر گیلن پر ایک شلنگ

قیمت کم ملتی تو اسے ۳۸۳ پونڈ ۱۳ شلنگ کم ملتے۔ بناؤ کہ اسے فی الحقیقت

کتنی رقم ملتی۔
۱۷۵۔ ثابت کرو کہ $(ب + ج - ا - لا) (ب - ج) (ا - لا) =$

۱۶ (ب - ج) (ج - ا) (ا - لا) (ب - ج) (ا - لا) (ب - ج) (ا - لا) (ج - ا)

(جیسے کلج - کیسبرج)

۱۷۶۔ اگر $ع = ب$ ، جہ مساوات $لا + ف + لا + ر = ۰$ کی اصلیں ہوں تو وہ

مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں $\frac{ب + ج}{ع} = \frac{ج + ع}{ب} = \frac{ع + ب}{ج}$ ہوں۔
(آر ایم اے - دو لچ)

۱۷۷۔ اگر $ا + ب$ کی شکل کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کو باہم ضرب دیا جائے
تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب دومربعوں کے حاصل جمع کی شکل میں بیان ہو سکتا ہے

اگر یہ معلوم ہو کہ $(ا + ب) (ج + د) (ع + ف) (گ + ہ) = ل + م$

قول اور م کی قیمت $ا، ب، ج، د، ع، ف، گ، ہ$ کی رقم میں معلوم کرو۔

(لنڈن یونیورسٹی)

۱۷۸۔ مساواتوں $لا + ا = ۱$ ، $۱ = لا + ا$ ، $۱ = ۱$ کو حل کرو۔

(آر ایم اے - دو لچ)

۱۷۹۔ ایک آدمی ایک امتحان میں شریک ہوتا ہے جس میں ۳ پرچے ہیں اور ہر

پرچے کے زیادہ سے زیادہ نشان ۴ ہیں۔ ثابت کرو کہ کل ۲۴ نشان حاصل

کرنے کے مختلف طریقوں کی تعداد $\frac{۱}{۱۶} (۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶)$ ہے۔

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۸۰۔ اگر $ع = ب$ ، جہ مساوات $لا + ف + لا + ۱ = ۰$ کی اصلیں ہوں اور جہ

۱ مساوات $لا + ق + لا + ۱ = ۰$ کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ $(ع - ج)$

$(ب - ج) (ع + ل) (ب + ل) = ق - ف$

(آر ایم اے - دو لچ)

(کریٹ کلچ - کیبرج)

۱۸۷۔ انگلستان کے ایک عام انتخاب میں جدت پسندوں کی تعداد انگریزی قدامت پسندوں کی تعداد سے ۵۱ زیادہ تھی اور قدامت پسندوں کی کل تعداد انگریزی جدت پسندوں کی تعداد کے دو گنے سے بقدر ۵ زیادہ تھی۔ اسکاٹ لینڈ کے قدامت پسندوں کی تعداد ویلز کے جدت پسندوں کی تعداد کے مساوی تھی، اسکاٹ لینڈ کے جدت پسندوں کی کثرت ویلز کے قدامت پسندوں کی تعداد سے دو گنی تھی اور اول الذکر کی نسبت آئر لینڈ کی جدت پسند کثرت کے ساتھ ۲:۳ تھی۔ انگریزی قدامت پسندوں کی کثرت آئر لینڈ کے کل ممبروں کی تعداد سے بقدر ۱۰ زیادہ تھی۔ کل ممبروں کی تعداد ۶۵۲ تھی جن میں سے ۶۰ اسکاٹ لینڈ نے بھیجے۔ انگلستان، اسکاٹ لینڈ، آئر لینڈ اور ویلز میں سے ہر ایک کی ہر پارٹی کے ممبروں کی تعداد معلوم کرو۔

۱۸۸۔ ثابت کرو کہ $(ج - ب) + (ب - ا) + (ا - ج) = ۰$

$$= (ب - ج) + (ج - ا) + (ا - ب) = ۰$$

$$= (ا - ب) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱۳ & ۱۳ & ۱ \\ ۱ & ۱+۱۲ & ۱۲+۱ & ۱ \\ ۱ & ۲+۱ & ۱+۱۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} \quad \text{۱۸۹۔ ثابت کرو کہ}$$

[بال کلچ - آکسفورڈ]

$$۱۹۰۔ اگر $\frac{۱}{ا} + \frac{۱}{ب} + \frac{۱}{ج} = ۰$ تو$$

ثابت کرو کہ $ا، ب، ج$ سلسلہ موسیقی میں ہونگے سوائے اس صورت کے کہ

شرعی ناج - کیبرج

$$ب = ا + ج$$

۱۹۱۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱) ۱۳ - ۱۵ + ۱۵ - ۱۸۹ = ۰ \quad \text{یہ معلوم ہے کہ ایک اصل دوسری}$$

اصل سے بقدر ۲ کے زیادہ ہے۔

(۲) لا^۲ - ۴ لا + ۸ لا + ۳۵ = ۰ معلوم ہے کہ ایک اصل ۲ + ۱۲ - ۳۵ = ۰
(آر، ایم، اے سے ودیج)

۱۹۲ — دو عدد ۱۲ اور ۱۲ معلوم ہیں، ان سے دو اور عدد ۱۲ اور ۱۲ روابط

۳ = ۱۲ + ۱۲ اور ۳ = ۱۲ + ۱۲ کے ذریعے بنائے گئے ہیں۔

۱۲ سے اسی طرح دو اور عدد ۱۲ بنائے گئے ہیں اور علیٰ ہذا قیاس ان کی

قیمتیں ۱۲ اور ۱۲ کی رقم میں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر لاتنبہی ہو تو

۱۹۳ — اگر لا + ما + ی + ھ = ۰ تو ثابت کرو کہ

ھ لا (ھ + لا) + ما (ھ + لا) + ی (ھ + لا) + ھ (ھ + لا) = ۰

+ ھ ی (ھ + ی) + لا ما (ھ + ی) + ۴ لا ما ی ھ = ۰

(ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۴ — اگر لا + ۱۲ + ۱۲ کی قیمت میں حروف ۱۲، ۱۲، ۱۲ کے کسی ایک

زوج کے حروف کو باہم بدل دینے سے کوئی فرق نہ آئے تو کسی اور زوج کے

حروف کو باہم بدلنے سے ابھی اس میں کوئی فرق نہ آئے گا۔ نیز اس کی قیمت صفر

ہو جائے گی اگر لا + ۱۲ + ۱۲ = ۱۲ (جہاں لا + ۱۲ + ۱۲) (ریاضی ٹرائی پاس)

۱۹۵ — دو مقامات ۱۲ اور ۱۲ کے درمیان ریل گاڑی کی چار سٹرکیں ہیں۔

دو ریل گاڑیاں ۱۲ سے ۱۲ کی طرف ۶ بجے اور ۶ بجکر ۵ منٹ پر روانہ ہوتی

ہیں اور دو گاڑیاں ۱۲ سے ۱۲ کی طرف بالترتیب ۵ بجکر ۵ منٹ اور ۱۲ بجکر

۵ بجے روانہ ہوتی ہیں۔ اگر یہ چاروں ریل گاڑیاں (جبکہ ان کو نقطے تصور

کیا جائے) ایک ہی وقت میں ایک دوسرے کے پاس سے گزریں اور

ان کی رفتاریں بالترتیب لا، لا، لا، لا میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\frac{y_1 + m}{y_1} = \frac{y_2 + m}{y_2} = \frac{y_3}{y_1 - y_2}}$$

جہاں اب کا وہ میانی فاصلہ میلوں میں م سے قیصر ہوتا ہے۔
(رژنی کالج - کیمبرج)

۱۹۶۔ ثابت کرو کہ اگر قیسرے اور قیسرے سے زیادہ درجہ کی رتوں کو نظر انداز کر دیا جائے تو

$$(x^2 + y^2 + z^2) \frac{1}{x} + (x+y) \frac{1}{y} + 1 = \frac{\frac{1}{x}(x-1) + \frac{1}{y}(y-1)}{(x-1)(y-1)z+1}$$

۱۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ ۱، ۲-ب، ۳-ب، ۴-ب، ...، (ن-۱)-ب کی دو دورتوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع صفر ہو جاتا ہے اگر ن، ۳-م-۱ کی شکل کا ہوا اور ۲-ب = (۳-م-۲) (۳+م) ب

۱۹۸۔ اگر نجف ہو اور درمیان کی رقبوں کا زوج ع + ہ اور ع - ہ ہو
تو ثابت کرو کہ ایک سلسلہ محاسبہ کے کعبوں کا حاصل جمع n ع + {ع + (ن - ۱) ہ} ہے۔

۱۹۹۔ اگر ا و ا ب ج حقیقی مثبت مقادیر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{مربئی کا جی۔ کیمرہ ج})$$

۲۰۰۔ اور اب اور ج ایک ہی وقت ایک شہر کی طرف جوف میل فاصلہ پر واقع ہے روانہ ہوتے ہیں، اور ال میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے پیدل چلنا شروع کرتا ہے اور اب اور ج، م میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے گاڑی پر سفر کرتے ہیں، کچھ دیر کے بعد اب اور ج گاڑی سے اتر کر ال کی رفتار سے پیدل چلنا شروع کر دیتا ہے اور ج، ال کو گاڑی میں ساتھ بٹھانے کے لئے واپس آتا ہے، پھر ال اور ج گاڑی پر بیٹھ کر عین اسی وقت شہر مذکور میں پہنچتے ہیں جس وقت اب پہنچتا ہے ثابت کرو کہ کل وقت $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ م + ال گھنٹوں کے مساوی ہے۔

۲۰۱۔ ایک شہر کے بازار شطرنج کے نقشہ کی شکل میں بنائے گئے ہیں۔ ہم بازار کی
کارتھ شمالاً جنوباً ہے اور ن کا مشرقاً غرباً۔ ایک آدمی شمال مغربی کو جنوب
مشرقی کو نہ تک چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ طے کر کے نما جا چکا ہے۔ متنازعہ
کتنے مختلف راستوں سے جاسکتا ہے۔

۲۰۲۔ مساوات $۲۷ + ۲۷ + ۲۷ + ۲۷ = ۱۰۸$ کو حل کرو۔

۲۰۳۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$
میں انحصار کی ن رتوں کے حاصل جمع اور پہلی ن رتوں کے حاصل جمع کے
فرق اور آخری رقم اور پہلی رقم کے فرق کی نسبت ن : ۲۰ ن - ۱ ہے۔

۲۰۴۔ ذیل کے سلسلوں کے ن دیں بسترق معلوم کرو۔

(۱) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} + \frac{1}{21} - \frac{1}{22} + \frac{1}{23} - \frac{1}{24} + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} + \frac{1}{27} - \frac{1}{28} + \frac{1}{29} - \frac{1}{30} + \frac{1}{31} - \frac{1}{32} + \frac{1}{33} - \frac{1}{34} + \frac{1}{35} - \frac{1}{36} + \frac{1}{37} - \frac{1}{38} + \frac{1}{39} - \frac{1}{40} + \frac{1}{41} - \frac{1}{42} + \frac{1}{43} - \frac{1}{44} + \frac{1}{45} - \frac{1}{46} + \frac{1}{47} - \frac{1}{48} + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} + \frac{1}{51} - \frac{1}{52} + \frac{1}{53} - \frac{1}{54} + \frac{1}{55} - \frac{1}{56} + \frac{1}{57} - \frac{1}{58} + \frac{1}{59} - \frac{1}{60} + \frac{1}{61} - \frac{1}{62} + \frac{1}{63} - \frac{1}{64} + \frac{1}{65} - \frac{1}{66} + \frac{1}{67} - \frac{1}{68} + \frac{1}{69} - \frac{1}{70} + \frac{1}{71} - \frac{1}{72} + \frac{1}{73} - \frac{1}{74} + \frac{1}{75} - \frac{1}{76} + \frac{1}{77} - \frac{1}{78} + \frac{1}{79} - \frac{1}{80} + \frac{1}{81} - \frac{1}{82} + \frac{1}{83} - \frac{1}{84} + \frac{1}{85} - \frac{1}{86} + \frac{1}{87} - \frac{1}{88} + \frac{1}{89} - \frac{1}{90} + \frac{1}{91} - \frac{1}{92} + \frac{1}{93} - \frac{1}{94} + \frac{1}{95} - \frac{1}{96} + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

(۲) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \frac{1}{34} + \frac{1}{35} + \frac{1}{36} + \frac{1}{37} + \frac{1}{38} + \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \frac{1}{44} + \frac{1}{45} + \frac{1}{46} + \frac{1}{47} + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \frac{1}{54} + \frac{1}{55} + \frac{1}{56} + \frac{1}{57} + \frac{1}{58} + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} + \frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \frac{1}{63} + \frac{1}{64} + \frac{1}{65} + \frac{1}{66} + \frac{1}{67} + \frac{1}{68} + \frac{1}{69} + \frac{1}{70} + \frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \frac{1}{73} + \frac{1}{74} + \frac{1}{75} + \frac{1}{76} + \frac{1}{77} + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} + \frac{1}{81} + \frac{1}{82} + \frac{1}{83} + \frac{1}{84} + \frac{1}{85} + \frac{1}{86} + \frac{1}{87} + \frac{1}{88} + \frac{1}{89} + \frac{1}{90} + \frac{1}{91} + \frac{1}{92} + \frac{1}{93} + \frac{1}{94} + \frac{1}{95} + \frac{1}{96} + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$

۲۰۵۔ ثابت کرو کہ $(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)(۱۰-۱۱)(۱۱-۱۲)(۱۲-۱۳)(۱۳-۱۴)(۱۴-۱۵)(۱۵-۱۶)(۱۶-۱۷)(۱۷-۱۸)(۱۸-۱۹)(۱۹-۲۰)(۲۰-۲۱)(۲۱-۲۲)(۲۲-۲۳)(۲۳-۲۴)(۲۴-۲۵)(۲۵-۲۶)(۲۶-۲۷)(۲۷-۲۸)(۲۸-۲۹)(۲۹-۳۰)(۳۰-۳۱)(۳۱-۳۲)(۳۲-۳۳)(۳۳-۳۴)(۳۴-۳۵)(۳۵-۳۶)(۳۶-۳۷)(۳۷-۳۸)(۳۸-۳۹)(۳۹-۴۰)(۴۰-۴۱)(۴۱-۴۲)(۴۲-۴۳)(۴۳-۴۴)(۴۴-۴۵)(۴۵-۴۶)(۴۶-۴۷)(۴۷-۴۸)(۴۸-۴۹)(۴۹-۵۰)(۵۰-۵۱)(۵۱-۵۲)(۵۲-۵۳)(۵۳-۵۴)(۵۴-۵۵)(۵۵-۵۶)(۵۶-۵۷)(۵۷-۵۸)(۵۸-۵۹)(۵۹-۶۰)(۶۰-۶۱)(۶۱-۶۲)(۶۲-۶۳)(۶۳-۶۴)(۶۴-۶۵)(۶۵-۶۶)(۶۶-۶۷)(۶۷-۶۸)(۶۸-۶۹)(۶۹-۷۰)(۷۰-۷۱)(۷۱-۷۲)(۷۲-۷۳)(۷۳-۷۴)(۷۴-۷۵)(۷۵-۷۶)(۷۶-۷۷)(۷۷-۷۸)(۷۸-۷۹)(۷۹-۸۰)(۸۰-۸۱)(۸۱-۸۲)(۸۲-۸۳)(۸۳-۸۴)(۸۴-۸۵)(۸۵-۸۶)(۸۶-۸۷)(۸۷-۸۸)(۸۸-۸۹)(۸۹-۹۰)(۹۰-۹۱)(۹۱-۹۲)(۹۲-۹۳)(۹۳-۹۴)(۹۴-۹۵)(۹۵-۹۶)(۹۶-۹۷)(۹۷-۹۸)(۹۸-۹۹)(۹۹-۱۰۰)$

$= (۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)(۱۰-۱۱)(۱۱-۱۲)(۱۲-۱۳)(۱۳-۱۴)(۱۴-۱۵)(۱۵-۱۶)(۱۶-۱۷)(۱۷-۱۸)(۱۸-۱۹)(۱۹-۲۰)(۲۰-۲۱)(۲۱-۲۲)(۲۲-۲۳)(۲۳-۲۴)(۲۴-۲۵)(۲۵-۲۶)(۲۶-۲۷)(۲۷-۲۸)(۲۸-۲۹)(۲۹-۳۰)(۳۰-۳۱)(۳۱-۳۲)(۳۲-۳۳)(۳۳-۳۴)(۳۴-۳۵)(۳۵-۳۶)(۳۶-۳۷)(۳۷-۳۸)(۳۸-۳۹)(۳۹-۴۰)(۴۰-۴۱)(۴۱-۴۲)(۴۲-۴۳)(۴۳-۴۴)(۴۴-۴۵)(۴۵-۴۶)(۴۶-۴۷)(۴۷-۴۸)(۴۸-۴۹)(۴۹-۵۰)(۵۰-۵۱)(۵۱-۵۲)(۵۲-۵۳)(۵۳-۵۴)(۵۴-۵۵)(۵۵-۵۶)(۵۶-۵۷)(۵۷-۵۸)(۵۸-۵۹)(۵۹-۶۰)(۶۰-۶۱)(۶۱-۶۲)(۶۲-۶۳)(۶۳-۶۴)(۶۴-۶۵)(۶۵-۶۶)(۶۶-۶۷)(۶۷-۶۸)(۶۸-۶۹)(۶۹-۷۰)(۷۰-۷۱)(۷۱-۷۲)(۷۲-۷۳)(۷۳-۷۴)(۷۴-۷۵)(۷۵-۷۶)(۷۶-۷۷)(۷۷-۷۸)(۷۸-۷۹)(۷۹-۸۰)(۸۰-۸۱)(۸۱-۸۲)(۸۲-۸۳)(۸۳-۸۴)(۸۴-۸۵)(۸۵-۸۶)(۸۶-۸۷)(۸۷-۸۸)(۸۸-۸۹)(۸۹-۹۰)(۹۰-۹۱)(۹۱-۹۲)(۹۲-۹۳)(۹۳-۹۴)(۹۴-۹۵)(۹۵-۹۶)(۹۶-۹۷)(۹۷-۹۸)(۹۸-۹۹)(۹۹-۱۰۰)$

$+ (۱-۲)(۲-۳)(۳-۴)(۴-۵)(۵-۶)(۶-۷)(۷-۸)(۸-۹)(۹-۱۰)(۱۰-۱۱)(۱۱-۱۲)(۱۲-۱۳)(۱۳-۱۴)(۱۴-۱۵)(۱۵-۱۶)(۱۶-۱۷)(۱۷-۱۸)(۱۸-۱۹)(۱۹-۲۰)(۲۰-۲۱)(۲۱-۲۲)(۲۲-۲۳)(۲۳-۲۴)(۲۴-۲۵)(۲۵-۲۶)(۲۶-۲۷)(۲۷-۲۸)(۲۸-۲۹)(۲۹-۳۰)(۳۰-۳۱)(۳۱-۳۲)(۳۲-۳۳)(۳۳-۳۴)(۳۴-۳۵)(۳۵-۳۶)(۳۶-۳۷)(۳۷-۳۸)(۳۸-۳۹)(۳۹-۴۰)(۴۰-۴۱)(۴۱-۴۲)(۴۲-۴۳)(۴۳-۴۴)(۴۴-۴۵)(۴۵-۴۶)(۴۶-۴۷)(۴۷-۴۸)(۴۸-۴۹)(۴۹-۵۰)(۵۰-۵۱)(۵۱-۵۲)(۵۲-۵۳)(۵۳-۵۴)(۵۴-۵۵)(۵۵-۵۶)(۵۶-۵۷)(۵۷-۵۸)(۵۸-۵۹)(۵۹-۶۰)(۶۰-۶۱)(۶۱-۶۲)(۶۲-۶۳)(۶۳-۶۴)(۶۴-۶۵)(۶۵-۶۶)(۶۶-۶۷)(۶۷-۶۸)(۶۸-۶۹)(۶۹-۷۰)(۷۰-۷۱)(۷۱-۷۲)(۷۲-۷۳)(۷۳-۷۴)(۷۴-۷۵)(۷۵-۷۶)(۷۶-۷۷)(۷۷-۷۸)(۷۸-۷۹)(۷۹-۸۰)(۸۰-۸۱)(۸۱-۸۲)(۸۲-۸۳)(۸۳-۸۴)(۸۴-۸۵)(۸۵-۸۶)(۸۶-۸۷)(۸۷-۸۸)(۸۸-۸۹)(۸۹-۹۰)(۹۰-۹۱)(۹۱-۹۲)(۹۲-۹۳)(۹۳-۹۴)(۹۴-۹۵)(۹۵-۹۶)(۹۶-۹۷)(۹۷-۹۸)(۹۸-۹۹)(۹۹-۱۰۰)$

۲۰۶۔ اگر a, b, c مساوات $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ کی اصلیاں ہوں تو

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{0}{abc} = 0$ کی قیمت a, b, c کی

کی رقوم میں معلوم کرو۔

۲۰۷۔ انگلستان میں ہر ۴۶ آدمیوں میں سے ایک آدمی سالانہ مرتا ہے اور ہر ۳۳ آدمیوں پر ایک آدمی سالانہ پیدا ہوتا ہے، اگر ترک وطن کا سلسلہ بند ہو جائے تو ثناء و اسی شرح سے کتنے عرصہ میں آبادی دگنی ہو جائے گی معلوم ہے

$$\text{لوک } ۳۰۱۰۳۰۰ = ۱۵۳۱، \text{ لوک } ۳۵۱۸۳۹۷۵۲ = ۱۵۳۱$$

$$\text{لوک } ۳۵۱۸۱۲۷۱۸ = ۱۵۱۸$$

۲۰۸۔ اگر $(۱+لا+لا^۲) = ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲} + لا^{۱۳} + لا^{۱۴} + لا^{۱۵} + لا^{۱۶} + لا^{۱۷} + لا^{۱۸} + لا^{۱۹} + لا^{۲۰} + لا^{۲۱} + لا^{۲۲} + لا^{۲۳} + لا^{۲۴} + لا^{۲۵} + لا^{۲۶} + لا^{۲۷} + لا^{۲۸} + لا^{۲۹} + لا^{۳۰} + لا^{۳۱} + لا^{۳۲} + لا^{۳۳} + لا^{۳۴} + لا^{۳۵} + لا^{۳۶} + لا^{۳۷} + لا^{۳۸} + لا^{۳۹} + لا^{۴۰} + لا^{۴۱} + لا^{۴۲} + لا^{۴۳} + لا^{۴۴} + لا^{۴۵} + لا^{۴۶} + لا^{۴۷} + لا^{۴۸} + لا^{۴۹} + لا^{۵۰} + لا^{۵۱} + لا^{۵۲} + لا^{۵۳} + لا^{۵۴} + لا^{۵۵} + لا^{۵۶} + لا^{۵۷} + لا^{۵۸} + لا^{۵۹} + لا^{۶۰} + لا^{۶۱} + لا^{۶۲} + لا^{۶۳} + لا^{۶۴} + لا^{۶۵} + لا^{۶۶} + لا^{۶۷} + لا^{۶۸} + لا^{۶۹} + لا^{۷۰} + لا^{۷۱} + لا^{۷۲} + لا^{۷۳} + لا^{۷۴} + لا^{۷۵} + لا^{۷۶} + لا^{۷۷} + لا^{۷۸} + لا^{۷۹} + لا^{۸۰} + لا^{۸۱} + لا^{۸۲} + لا^{۸۳} + لا^{۸۴} + لا^{۸۵} + لا^{۸۶} + لا^{۸۷} + لا^{۸۸} + لا^{۸۹} + لا^{۹۰} + لا^{۹۱} + لا^{۹۲} + لا^{۹۳} + لا^{۹۴} + لا^{۹۵} + لا^{۹۶} + لا^{۹۷} + لا^{۹۸} + لا^{۹۹} + لا^{۱۰۰}$

$$= ۱ - \frac{ن}{۱-ن} + \frac{ن^۲}{(۱-ن)^۲} - \frac{ن^۳}{(۱-ن)^۳} + \frac{ن^۴}{(۱-ن)^۴} - \frac{ن^۵}{(۱-ن)^۵} + \frac{ن^۶}{(۱-ن)^۶} - \frac{ن^۷}{(۱-ن)^۷} + \frac{ن^۸}{(۱-ن)^۸} - \frac{ن^۹}{(۱-ن)^۹} + \frac{ن^{۱۰}}{(۱-ن)^{۱۰}} - \frac{ن^{۱۱}}{(۱-ن)^{۱۱}} + \frac{ن^{۱۲}}{(۱-ن)^{۱۲}} - \frac{ن^{۱۳}}{(۱-ن)^{۱۳}} + \frac{ن^{۱۴}}{(۱-ن)^{۱۴}} - \frac{ن^{۱۵}}{(۱-ن)^{۱۵}} + \frac{ن^{۱۶}}{(۱-ن)^{۱۶}} - \frac{ن^{۱۷}}{(۱-ن)^{۱۷}} + \frac{ن^{۱۸}}{(۱-ن)^{۱۸}} - \frac{ن^{۱۹}}{(۱-ن)^{۱۹}} + \frac{ن^{۲۰}}{(۱-ن)^{۲۰}} - \frac{ن^{۲۱}}{(۱-ن)^{۲۱}} + \frac{ن^{۲۲}}{(۱-ن)^{۲۲}} - \frac{ن^{۲۳}}{(۱-ن)^{۲۳}} + \frac{ن^{۲۴}}{(۱-ن)^{۲۴}} - \frac{ن^{۲۵}}{(۱-ن)^{۲۵}} + \frac{ن^{۲۶}}{(۱-ن)^{۲۶}} - \frac{ن^{۲۷}}{(۱-ن)^{۲۷}} + \frac{ن^{۲۸}}{(۱-ن)^{۲۸}} - \frac{ن^{۲۹}}{(۱-ن)^{۲۹}} + \frac{ن^{۳۰}}{(۱-ن)^{۳۰}} - \frac{ن^{۳۱}}{(۱-ن)^{۳۱}} + \frac{ن^{۳۲}}{(۱-ن)^{۳۲}} - \frac{ن^{۳۳}}{(۱-ن)^{۳۳}} + \frac{ن^{۳۴}}{(۱-ن)^{۳۴}} - \frac{ن^{۳۵}}{(۱-ن)^{۳۵}} + \frac{ن^{۳۶}}{(۱-ن)^{۳۶}} - \frac{ن^{۳۷}}{(۱-ن)^{۳۷}} + \frac{ن^{۳۸}}{(۱-ن)^{۳۸}} - \frac{ن^{۳۹}}{(۱-ن)^{۳۹}} + \frac{ن^{۴۰}}{(۱-ن)^{۴۰}} - \frac{ن^{۴۱}}{(۱-ن)^{۴۱}} + \frac{ن^{۴۲}}{(۱-ن)^{۴۲}} - \frac{ن^{۴۳}}{(۱-ن)^{۴۳}} + \frac{ن^{۴۴}}{(۱-ن)^{۴۴}} - \frac{ن^{۴۵}}{(۱-ن)^{۴۵}} + \frac{ن^{۴۶}}{(۱-ن)^{۴۶}} - \frac{ن^{۴۷}}{(۱-ن)^{۴۷}} + \frac{ن^{۴۸}}{(۱-ن)^{۴۸}} - \frac{ن^{۴۹}}{(۱-ن)^{۴۹}} + \frac{ن^{۵۰}}{(۱-ن)^{۵۰}} - \frac{ن^{۵۱}}{(۱-ن)^{۵۱}} + \frac{ن^{۵۲}}{(۱-ن)^{۵۲}} - \frac{ن^{۵۳}}{(۱-ن)^{۵۳}} + \frac{ن^{۵۴}}{(۱-ن)^{۵۴}} - \frac{ن^{۵۵}}{(۱-ن)^{۵۵}} + \frac{ن^{۵۶}}{(۱-ن)^{۵۶}} - \frac{ن^{۵۷}}{(۱-ن)^{۵۷}} + \frac{ن^{۵۸}}{(۱-ن)^{۵۸}} - \frac{ن^{۵۹}}{(۱-ن)^{۵۹}} + \frac{ن^{۶۰}}{(۱-ن)^{۶۰}} - \frac{ن^{۶۱}}{(۱-ن)^{۶۱}} + \frac{ن^{۶۲}}{(۱-ن)^{۶۲}} - \frac{ن^{۶۳}}{(۱-ن)^{۶۳}} + \frac{ن^{۶۴}}{(۱-ن)^{۶۴}} - \frac{ن^{۶۵}}{(۱-ن)^{۶۵}} + \frac{ن^{۶۶}}{(۱-ن)^{۶۶}} - \frac{ن^{۶۷}}{(۱-ن)^{۶۷}} + \frac{ن^{۶۸}}{(۱-ن)^{۶۸}} - \frac{ن^{۶۹}}{(۱-ن)^{۶۹}} + \frac{ن^{۷۰}}{(۱-ن)^{۷۰}} - \frac{ن^{۷۱}}{(۱-ن)^{۷۱}} + \frac{ن^{۷۲}}{(۱-ن)^{۷۲}} - \frac{ن^{۷۳}}{(۱-ن)^{۷۳}} + \frac{ن^{۷۴}}{(۱-ن)^{۷۴}} - \frac{ن^{۷۵}}{(۱-ن)^{۷۵}} + \frac{ن^{۷۶}}{(۱-ن)^{۷۶}} - \frac{ن^{۷۷}}{(۱-ن)^{۷۷}} + \frac{ن^{۷۸}}{(۱-ن)^{۷۸}} - \frac{ن^{۷۹}}{(۱-ن)^{۷۹}} + \frac{ن^{۸۰}}{(۱-ن)^{۸۰}} - \frac{ن^{۸۱}}{(۱-ن)^{۸۱}} + \frac{ن^{۸۲}}{(۱-ن)^{۸۲}} - \frac{ن^{۸۳}}{(۱-ن)^{۸۳}} + \frac{ن^{۸۴}}{(۱-ن)^{۸۴}} - \frac{ن^{۸۵}}{(۱-ن)^{۸۵}} + \frac{ن^{۸۶}}{(۱-ن)^{۸۶}} - \frac{ن^{۸۷}}{(۱-ن)^{۸۷}} + \frac{ن^{۸۸}}{(۱-ن)^{۸۸}} - \frac{ن^{۸۹}}{(۱-ن)^{۸۹}} + \frac{ن^{۹۰}}{(۱-ن)^{۹۰}} - \frac{ن^{۹۱}}{(۱-ن)^{۹۱}} + \frac{ن^{۹۲}}{(۱-ن)^{۹۲}} - \frac{ن^{۹۳}}{(۱-ن)^{۹۳}} + \frac{ن^{۹۴}}{(۱-ن)^{۹۴}} - \frac{ن^{۹۵}}{(۱-ن)^{۹۵}} + \frac{ن^{۹۶}}{(۱-ن)^{۹۶}} - \frac{ن^{۹۷}}{(۱-ن)^{۹۷}} + \frac{ن^{۹۸}}{(۱-ن)^{۹۸}} - \frac{ن^{۹۹}}{(۱-ن)^{۹۹}} + \frac{ن^{۱۰۰}}{(۱-ن)^{۱۰۰}}$$

بشرطیکہ ۳ کا ضعف : ہو موثر الذکر صورت میں اس کی کیا قیمت ہوگی۔

(سینٹ جونز کالج کیمبرج)

۲۰۹۔ ایک جامعہ میں پول، ترک، یونانی، جرمن اور اٹلی کے لوگ شامل ہیں۔ پول، جرمنوں کی ایک تہائی سے بقدر ایک کے کم ہیں اور اٹلی والوں کی تعداد کے نصف سے تین کم ہیں۔ ترک اور جرمن، یونانیوں اور اٹلی والوں سے ۳ زیادہ ہیں۔ جرمن اور یونانی کل جامعہ کے نصف سے ایک کم ہیں۔ اٹلی والے اور یونانی کل جامعہ کے ۲ کے مساوی ہیں۔ ہر قوم کے لوگوں کی تعداد معلوم کرو۔

$$۲۱۰۔ ایک سلسلہ کی ن ویں رقم $(۱+ن)$ ، $ن$ ، $(ن+۲)$ ، $(ن-۱)$ ، $(ن-۲)$ ، $(ن-۳)$ ، $(ن-۴)$ ، $(ن-۵)$ ، $(ن-۶)$ ، $(ن-۷)$ ، $(ن-۸)$ ، $(ن-۹)$ ، $(ن-۱۰)$ ، $(ن-۱۱)$ ، $(ن-۱۲)$ ، $(ن-۱۳)$ ، $(ن-۱۴)$ ، $(ن-۱۵)$ ، $(ن-۱۶)$ ، $(ن-۱۷)$ ، $(ن-۱۸)$ ، $(ن-۱۹)$ ، $(ن-۲۰)$ ، $(ن-۲۱)$ ، $(ن-۲۲)$ ، $(ن-۲۳)$ ، $(ن-۲۴)$ ، $(ن-۲۵)$ ، $(ن-۲۶)$ ، $(ن-۲۷)$ ، $(ن-۲۸)$ ، $(ن-۲۹)$ ، $(ن-۳۰)$ ، $(ن-۳۱)$ ، $(ن-۳۲)$ ، $(ن-۳۳)$ ، $(ن-۳۴)$ ، $(ن-۳۵)$ ، $(ن-۳۶)$ ، $(ن-۳۷)$ ، $(ن-۳۸)$ ، $(ن-۳۹)$ ، $(ن-۴۰)$ ، $(ن-۴۱)$ ، $(ن-۴۲)$ ، $(ن-۴۳)$ ، $(ن-۴۴)$ ، $(ن-۴۵)$ ، $(ن-۴۶)$ ، $(ن-۴۷)$ ، $(ن-۴۸)$ ، $(ن-۴۹)$ ، $(ن-۵۰)$ ، $(ن-۵۱)$ ، $(ن-۵۲)$ ، $(ن-۵۳)$ ، $(ن-۵۴)$ ، $(ن-۵۵)$ ، $(ن-۵۶)$ ، $(ن-۵۷)$ ، $(ن-۵۸)$ ، $(ن-۵۹)$ ، $(ن-۶۰)$ ، $(ن-۶۱)$ ، $(ن-۶۲)$ ، $(ن-۶۳)$ ، $(ن-۶۴)$ ، $(ن-۶۵)$ ، $(ن-۶۶)$ ، $(ن-۶۷)$ ، $(ن-۶۸)$ ، $(ن-۶۹)$ ، $(ن-۷۰)$ ، $(ن-۷۱)$ ، $(ن-۷۲)$ ، $(ن-۷۳)$ ، $(ن-۷۴)$ ، $(ن-۷۵)$ ، $(ن-۷۶)$ ، $(ن-۷۷)$ ، $(ن-۷۸)$ ، $(ن-۷۹)$ ، $(ن-۸۰)$ ، $(ن-۸۱)$ ، $(ن-۸۲)$ ، $(ن-۸۳)$ ، $(ن-۸۴)$ ، $(ن-۸۵)$ ، $(ن-۸۶)$ ، $(ن-۸۷)$ ، $(ن-۸۸)$ ، $(ن-۸۹)$ ، $(ن-۹۰)$ ، $(ن-۹۱)$ ، $(ن-۹۲)$ ، $(ن-۹۳)$ ، $(ن-۹۴)$ ، $(ن-۹۵)$ ، $(ن-۹۶)$ ، $(ن-۹۷)$ ، $(ن-۹۸)$ ، $(ن-۹۹)$ ، $(ن-۱۰۰)$$$

ہے، اس سلسلہ کا حاصل جمع لانا ہی تک معلوم کرو۔ (آگسٹورٹ موڈز)

۲۱۱۔ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن - \frac{ن(ن-۱)}{۲} + \frac{ن(ن-۲)(ن-۳)}{۳} - \frac{ن(ن-۴)(ن-۵)(ن-۶)}{۴} + \frac{ن(ن-۷)(ن-۸)(ن-۹)(ن-۱۰)}{۵} - \frac{ن(ن-۱۱)(ن-۱۲)(ن-۱۳)(ن-۱۴)(ن-۱۵)}{۶} + \frac{ن(ن-۱۶)(ن-۱۷)(ن-۱۸)(ن-۱۹)(ن-۲۰)(ن-۲۱)(ن-۲۲)(ن-۲۳)(ن-۲۴)(ن-۲۵)}{۷} - \frac{ن(ن-۲۶)(ن-۲۷)(ن-۲۸)(ن-۲۹)(ن-۳۰)(ن-۳۱)(ن-۳۲)(ن-۳۳)(ن-۳۴)(ن-۳۵)(ن-۳۶)(ن-۳۷)(ن-۳۸)(ن-۳۹)(ن-۴۰)(ن-۴۱)(ن-۴۲)(ن-۴۳)(ن-۴۴)(ن-۴۵)(ن-۴۶)(ن-۴۷)(ن-۴۸)(ن-۴۹)(ن-۵۰)(ن-۵۱)(ن-۵۲)(ن-۵۳)(ن-۵۴)(ن-۵۵)(ن-۵۶)(ن-۵۷)(ن-۵۸)(ن-۵۹)(ن-۶۰)(ن-۶۱)(ن-۶۲)(ن-۶۳)(ن-۶۴)(ن-۶۵)(ن-۶۶)(ن-۶۷)(ن-۶۸)(ن-۶۹)(ن-۷۰)(ن-۷۱)(ن-۷۲)(ن-۷۳)(ن-۷۴)(ن-۷۵)(ن-۷۶)(ن-۷۷)(ن-۷۸)(ن-۷۹)(ن-۸۰)(ن-۸۱)(ن-۸۲)(ن-۸۳)(ن-۸۴)(ن-۸۵)(ن-۸۶)(ن-۸۷)(ن-۸۸)(ن-۸۹)(ن-۹۰)(ن-۹۱)(ن-۹۲)(ن-۹۳)(ن-۹۴)(ن-۹۵)(ن-۹۶)(ن-۹۷)(ن-۹۸)(ن-۹۹)(ن-۱۰۰)}{۱۰۰} = ۱$$

$$۱ + \frac{ن(ن-۱)}{۲} - \frac{ن(ن-۲)(ن-۳)}{۳} + \frac{ن(ن-۴)(ن-۵)(ن-۶)}{۴} - \frac{ن(ن-۷)(ن-۸)(ن-۹)(ن-۱۰)}{۵} + \frac{ن(ن-۱۱)(ن-۱۲)(ن-۱۳)(ن-۱۴)(ن-۱۵)}{۶} - \frac{ن(ن-۱۶)(ن-۱۷)(ن-۱۸)(ن-۱۹)(ن-۲۰)(ن-۲۱)(ن-۲۲)(ن-۲۳)(ن-۲۴)(ن-۲۵)}{۷} + \frac{ن(ن-۲۶)(ن-۲۷)(ن-۲۸)(ن-۲۹)(ن-۳۰)(ن-۳۱)(ن-۳۲)(ن-۳۳)(ن-۳۴)(ن-۳۵)(ن-۳۶)(ن-۳۷)(ن-۳۸)(ن-۳۹)(ن-۴۰)(ن-۴۱)(ن-۴۲)(ن-۴۳)(ن-۴۴)(ن-۴۵)(ن-۴۶)(ن-۴۷)(ن-۴۸)(ن-۴۹)(ن-۵۰)(ن-۵۱)(ن-۵۲)(ن-۵۳)(ن-۵۴)(ن-۵۵)(ن-۵۶)(ن-۵۷)(ن-۵۸)(ن-۵۹)(ن-۶۰)(ن-۶۱)(ن-۶۲)(ن-۶۳)(ن-۶۴)(ن-۶۵)(ن-۶۶)(ن-۶۷)(ن-۶۸)(ن-۶۹)(ن-۷۰)(ن-۷۱)(ن-۷۲)(ن-۷۳)(ن-۷۴)(ن-۷۵)(ن-۷۶)(ن-۷۷)(ن-۷۸)(ن-۷۹)(ن-۸۰)(ن-۸۱)(ن-۸۲)(ن-۸۳)(ن-۸۴)(ن-۸۵)(ن-۸۶)(ن-۸۷)(ن-۸۸)(ن-۸۹)(ن-۹۰)(ن-۹۱)(ن-۹۲)(ن-۹۳)(ن-۹۴)(ن-۹۵)(ن-۹۶)(ن-۹۷)(ن-۹۸)(ن-۹۹)(ن-۱۰۰)}{۱۰۰} = ۱$$

(پہرک کالج - کیمبرج)

۲۱۲۔ ذیل کے سلسلوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۲۱۳۔ نمبر حاصل کر سکتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ کتنے مختلف طریقوں سے، نشانوں میں ۳۰ نمبر حاصل کر سکتا ہے۔
(پہرے کا کالج - کیمبرج)
۲۱۸۔ ثابت کرو کہ جملہ $لا + ب لا + ج لا + د لا - ع$ ایک کامل مربع اور ایک کامل مکعب کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا اگر

$$\frac{۱۲}{۵} = \frac{۱۲}{۵} = \frac{۱۲}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

۲۱۹۔ ایک مثیلی میں ۶ سیاہ گیند ہیں اور باقی سفید گیند ہیں جن کی تعداد چھ سے کم ہے۔ تین گیند یکے بعد دیگرے نکالے گئے ہیں اور واپس نہیں رکھے گئے، یہ گیند سب کے سب سفید ہیں، ثابت کرو کہ اس کے بعد سیاہ گیند نکلنے کا فریضہ $\frac{۶۶}{۹۰}$ ہے۔
(جیس کا کالج - کیمبرج)
۲۲۰۔ ثابت کرو کہ پہلے ن صحیح عددوں کے مربعوں میں سے دو دو کے

حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۱}{۳۶} (۱-۱) (۱-۲) (۱-۳) (۱-۴) (۱-۵) (۱-۶)$ ہے۔
(کینس کا کالج - کیمبرج)

$$۲۲۱۔ اگر $\frac{۱}{۱} (ب-ج) + \frac{۱}{۲} (ج-د) + \frac{۱}{۳} (د-ا) = ۰$$$

کی اسلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۰ = (ب-ج) \pm (ج-د) \pm (د-ا) \pm (ا-ب)$$

۲۲۲۔ ثابت کرو کہ اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ن = ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ + ۱۱ - ۱۲ + ۱۳ - ۱۴ + ۱۵ - ۱۶ + ۱۷ - ۱۸ + ۱۹ - ۲۰ + ۲۱ - ۲۲ + ۲۳ - ۲۴ + ۲۵ - ۲۶ + ۲۷ - ۲۸ + ۲۹ - ۳۰ + ۳۱ - ۳۲ + ۳۳ - ۳۴ + ۳۵ - ۳۶ + ۳۷ - ۳۸ + ۳۹ - ۴۰ + ۴۱ - ۴۲ + ۴۳ - ۴۴ + ۴۵ - ۴۶ + ۴۷ - ۴۸ + ۴۹ - ۵۰ + ۵۱ - ۵۲ + ۵۳ - ۵۴ + ۵۵ - ۵۶ + ۵۷ - ۵۸ + ۵۹ - ۶۰ + ۶۱ - ۶۲ + ۶۳ - ۶۴ + ۶۵ - ۶۶ + ۶۷ - ۶۸ + ۶۹ - ۷۰ + ۷۱ - ۷۲ + ۷۳ - ۷۴ + ۷۵ - ۷۶ + ۷۷ - ۷۸ + ۷۹ - ۸۰ + ۸۱ - ۸۲ + ۸۳ - ۸۴ + ۸۵ - ۸۶ + ۸۷ - ۸۸ + ۸۹ - ۹۰ + ۹۱ - ۹۲ + ۹۳ - ۹۴ + ۹۵ - ۹۶ + ۹۷ - ۹۸ + ۹۹ - ۱۰۰ + ۱۰۱ - ۱۰۲ + ۱۰۳ - ۱۰۴ + ۱۰۵ - ۱۰۶ + ۱۰۷ - ۱۰۸ + ۱۰۹ - ۱۱۰ + ۱۱۱ - ۱۱۲ + ۱۱۳ - ۱۱۴ + ۱۱۵ - ۱۱۶ + ۱۱۷ - ۱۱۸ + ۱۱۹ - ۱۲۰ + ۱۲۱ - ۱۲۲ + ۱۲۳ - ۱۲۴ + ۱۲۵ - ۱۲۶ + ۱۲۷ - ۱۲۸ + ۱۲۹ - ۱۳۰ + ۱۳۱ - ۱۳۲ + ۱۳۳ - ۱۳۴ + ۱۳۵ - ۱۳۶ + ۱۳۷ - ۱۳۸ + ۱۳۹ - ۱۴۰ + ۱۴۱ - ۱۴۲ + ۱۴۳ - ۱۴۴ + ۱۴۵ - ۱۴۶ + ۱۴۷ - ۱۴۸ + ۱۴۹ - ۱۵۰ + ۱۵۱ - ۱۵۲ + ۱۵۳ - ۱۵۴ + ۱۵۵ - ۱۵۶ + ۱۵۷ - ۱۵۸ + ۱۵۹ - ۱۶۰ + ۱۶۱ - ۱۶۲ + ۱۶۳ - ۱۶۴ + ۱۶۵ - ۱۶۶ + ۱۶۷ - ۱۶۸ + ۱۶۹ - ۱۷۰ + ۱۷۱ - ۱۷۲ + ۱۷۳ - ۱۷۴ + ۱۷۵ - ۱۷۶ + ۱۷۷ - ۱۷۸ + ۱۷۹ - ۱۸۰ + ۱۸۱ - ۱۸۲ + ۱۸۳ - ۱۸۴ + ۱۸۵ - ۱۸۶ + ۱۸۷ - ۱۸۸ + ۱۸۹ - ۱۹۰ + ۱۹۱ - ۱۹۲ + ۱۹۳ - ۱۹۴ + ۱۹۵ - ۱۹۶ + ۱۹۷ - ۱۹۸ + ۱۹۹ - ۲۰۰ + ۲۰۱ - ۲۰۲ + ۲۰۳ - ۲۰۴ + ۲۰۵ - ۲۰۶ + ۲۰۷ - ۲۰۸ + ۲۰۹ - ۲۱۰ + ۲۱۱ - ۲۱۲ + ۲۱۳ - ۲۱۴ + ۲۱۵ - ۲۱۶ + ۲۱۷ - ۲۱۸ + ۲۱۹ - ۲۲۰ + ۲۲۱ - ۲۲۲ + ۲۲۳ - ۲۲۴ + ۲۲۵ - ۲۲۶ + ۲۲۷ - ۲۲۸ + ۲۲۹ - ۲۳۰ + ۲۳۱ - ۲۳۲ + ۲۳۳ - ۲۳۴ + ۲۳۵ - ۲۳۶ + ۲۳۷ - ۲۳۸ + ۲۳۹ - ۲۴۰ + ۲۴۱ - ۲۴۲ + ۲۴۳ - ۲۴۴ + ۲۴۵ - ۲۴۶ + ۲۴۷ - ۲۴۸ + ۲۴۹ - ۲۵۰ + ۲۵۱ - ۲۵۲ + ۲۵۳ - ۲۵۴ + ۲۵۵ - ۲۵۶ + ۲۵۷ - ۲۵۸ + ۲۵۹ - ۲۶۰ + ۲۶۱ - ۲۶۲ + ۲۶۳ - ۲۶۴ + ۲۶۵ - ۲۶۶ + ۲۶۷ - ۲۶۸ + ۲۶۹ - ۲۷۰ + ۲۷۱ - ۲۷۲ + ۲۷۳ - ۲۷۴ + ۲۷۵ - ۲۷۶ + ۲۷۷ - ۲۷۸ + ۲۷۹ - ۲۸۰ + ۲۸۱ - ۲۸۲ + ۲۸۳ - ۲۸۴ + ۲۸۵ - ۲۸۶ + ۲۸۷ - ۲۸۸ + ۲۸۹ - ۲۹۰ + ۲۹۱ - ۲۹۲ + ۲۹۳ - ۲۹۴ + ۲۹۵ - ۲۹۶ + ۲۹۷ - ۲۹۸ + ۲۹۹ - ۳۰۰ + ۳۰۱ - ۳۰۲ + ۳۰۳ - ۳۰۴ + ۳۰۵ - ۳۰۶ + ۳۰۷ - ۳۰۸ + ۳۰۹ - ۳۱۰ + ۳۱۱ - ۳۱۲ + ۳۱۳ - ۳۱۴ + ۳۱۵ - ۳۱۶ + ۳۱۷ - ۳۱۸ + ۳۱۹ - ۳۲۰ + ۳۲۱ - ۳۲۲ + ۳۲۳ - ۳۲۴ + ۳۲۵ - ۳۲۶ + ۳۲۷ - ۳۲۸ + ۳۲۹ - ۳۳۰ + ۳۳۱ - ۳۳۲ + ۳۳۳ - ۳۳۴ + ۳۳۵ - ۳۳۶ + ۳۳۷ - ۳۳۸ + ۳۳۹ - ۳۴۰ + ۳۴۱ - ۳۴۲ + ۳۴۳ - ۳۴۴ + ۳۴۵ - ۳۴۶ + ۳۴۷ - ۳۴۸ + ۳۴۹ - ۳۵۰ + ۳۵۱ - ۳۵۲ + ۳۵۳ - ۳۵۴ + ۳۵۵ - ۳۵۶ + ۳۵۷ - ۳۵۸ + ۳۵۹ - ۳۶۰ + ۳۶۱ - ۳۶۲ + ۳۶۳ - ۳۶۴ + ۳۶۵ - ۳۶۶ + ۳۶۷ - ۳۶۸ + ۳۶۹ - ۳۷۰ + ۳۷۱ - ۳۷۲ + ۳۷۳ - ۳۷۴ + ۳۷۵ - ۳۷۶ + ۳۷۷ - ۳۷۸ + ۳۷۹ - ۳۸۰ + ۳۸۱ - ۳۸۲ + ۳۸۳ - ۳۸۴ + ۳۸۵ - ۳۸۶ + ۳۸۷ - ۳۸۸ + ۳۸۹ - ۳۹۰ + ۳۹۱ - ۳۹۲ + ۳۹۳ - ۳۹۴ + ۳۹۵ - ۳۹۶ + ۳۹۷ - ۳۹۸ + ۳۹۹ - ۴۰۰ + ۴۰۱ - ۴۰۲ + ۴۰۳ - ۴۰۴ + ۴۰۵ - ۴۰۶ + ۴۰۷ - ۴۰۸ + ۴۰۹ - ۴۱۰ + ۴۱۱ - ۴۱۲ + ۴۱۳ - ۴۱۴ + ۴۱۵ - ۴۱۶ + ۴۱۷ - ۴۱۸ + ۴۱۹ - ۴۲۰ + ۴۲۱ - ۴۲۲ + ۴۲۳ - ۴۲۴ + ۴۲۵ - ۴۲۶ + ۴۲۷ - ۴۲۸ + ۴۲۹ - ۴۳۰ + ۴۳۱ - ۴۳۲ + ۴۳۳ - ۴۳۴ + ۴۳۵ - ۴۳۶ + ۴۳۷ - ۴۳۸ + ۴۳۹ - ۴۴۰ + ۴۴۱ - ۴۴۲ + ۴۴۳ - ۴۴۴ + ۴۴۵ - ۴۴۶ + ۴۴۷ - ۴۴۸ + ۴۴۹ - ۴۵۰ + ۴۵۱ - ۴۵۲ + ۴۵۳ - ۴۵۴ + ۴۵۵ - ۴۵۶ + ۴۵۷ - ۴۵۸ + ۴۵۹ - ۴۶۰ + ۴۶۱ - ۴۶۲ + ۴۶۳ - ۴۶۴ + ۴۶۵ - ۴۶۶ + ۴۶۷ - ۴۶۸ + ۴۶۹ - ۴۷۰ + ۴۷۱ - ۴۷۲ + ۴۷۳ - ۴۷۴ + ۴۷۵ - ۴۷۶ + ۴۷۷ - ۴۷۸ + ۴۷۹ - ۴۸۰ + ۴۸۱ - ۴۸۲ + ۴۸۳ - ۴۸۴ + ۴۸۵ - ۴۸۶ + ۴۸۷ - ۴۸۸ + ۴۸۹ - ۴۹۰ + ۴۹۱ - ۴۹۲ + ۴۹۳ - ۴۹۴ + ۴۹۵ - ۴۹۶ + ۴۹۷ - ۴۹۸ + ۴۹۹ - ۵۰۰ + ۵۰۱ - ۵۰۲ + ۵۰۳ - ۵۰۴ + ۵۰۵ - ۵۰۶ + ۵۰۷ - ۵۰۸ + ۵۰۹ - ۵۱۰ + ۵۱۱ - ۵۱۲ + ۵۱۳ - ۵۱۴ + ۵۱۵ - ۵۱۶ + ۵۱۷ - ۵۱۸ + ۵۱۹ - ۵۲۰ + ۵۲۱ - ۵۲۲ + ۵۲۳ - ۵۲۴ + ۵۲۵ - ۵۲۶ + ۵۲۷ - ۵۲۸ + ۵۲۹ - ۵۳۰ + ۵۳۱ - ۵۳۲ + ۵۳۳ - ۵۳۴ + ۵۳۵ - ۵۳۶ + ۵۳۷ - ۵۳۸ + ۵۳۹ - ۵۴۰ + ۵۴۱ - ۵۴۲ + ۵۴۳ - ۵۴۴ + ۵۴۵ - ۵۴۶ + ۵۴۷ - ۵۴۸ + ۵۴۹ - ۵۵۰ + ۵۵۱ - ۵۵۲ + ۵۵۳ - ۵۵۴ + ۵۵۵ - ۵۵۶ + ۵۵۷ - ۵۵۸ + ۵۵۹ - ۵۶۰ + ۵۶۱ - ۵۶۲ + ۵۶۳ - ۵۶۴ + ۵۶۵ - ۵۶۶ + ۵۶۷ - ۵۶۸ + ۵۶۹ - ۵۷۰ + ۵۷۱ - ۵۷۲ + ۵۷۳ - ۵۷۴ + ۵۷۵ - ۵۷۶ + ۵۷۷ - ۵۷۸ + ۵۷۹ - ۵۸۰ + ۵۸۱ - ۵۸۲ + ۵۸۳ - ۵۸۴ + ۵۸۵ - ۵۸۶ + ۵۸۷ - ۵۸۸ + ۵۸۹ - ۵۹۰ + ۵۹۱ - ۵۹۲ + ۵۹۳ - ۵۹۴ + ۵۹۵ - ۵۹۶ + ۵۹۷ - ۵۹۸ + ۵۹۹ - ۶۰۰ + ۶۰۱ - ۶۰۲ + ۶۰۳ - ۶۰۴ + ۶۰۵ - ۶۰۶ + ۶۰۷ - ۶۰۸ + ۶۰۹ - ۶۱۰ + ۶۱۱ - ۶۱۲ + ۶۱۳ - ۶۱۴ + ۶۱۵ - ۶۱۶ + ۶۱۷ - ۶۱۸ + ۶۱۹ - ۶۲۰ + ۶۲۱ - ۶۲۲ + ۶۲۳ - ۶۲۴ + ۶۲۵ - ۶۲۶ + ۶۲۷ - ۶۲۸ + ۶۲۹ - ۶۳۰ + ۶۳۱ - ۶۳۲ + ۶۳۳ - ۶۳۴ + ۶۳۵ - ۶۳۶ + ۶۳۷ - ۶۳۸ + ۶۳۹ - ۶۴۰ + ۶۴۱ - ۶۴۲ + ۶۴۳ - ۶۴۴ + ۶۴۵ - ۶۴۶ + ۶۴۷ - ۶۴۸ + ۶۴۹ - ۶۵۰ + ۶۵۱ - ۶۵۲ + ۶۵۳ - ۶۵۴ + ۶۵۵ - ۶۵۶ + ۶۵۷ - ۶۵۸ + ۶۵۹ - ۶۶۰ + ۶۶۱ - ۶۶۲ + ۶۶۳ - ۶۶۴ + ۶۶۵ - ۶۶۶ + ۶۶۷ - ۶۶۸ + ۶۶۹ - ۶۷۰ + ۶۷۱ - ۶۷۲ + ۶۷۳ - ۶۷۴ + ۶۷۵ - ۶۷۶ + ۶۷۷ - ۶۷۸ + ۶۷۹ - ۶۸۰ + ۶۸۱ - ۶۸۲ + ۶۸۳ - ۶۸۴ + ۶۸۵ - ۶۸۶ + ۶۸۷ - ۶۸۸ + ۶۸۹ - ۶۹۰ + ۶۹۱ - ۶۹۲ + ۶۹۳ - ۶۹۴ + ۶۹۵ - ۶۹۶ + ۶۹۷ - ۶۹۸ + ۶۹۹ - ۷۰۰ + ۷۰۱ - ۷۰۲ + ۷۰۳ - ۷۰۴ + ۷۰۵ - ۷۰۶ + ۷۰۷ - ۷۰۸ + ۷۰۹ - ۷۱۰ + ۷۱۱ - ۷۱۲ + ۷۱۳ - ۷۱۴ + ۷۱۵ - ۷۱۶ + ۷۱۷ - ۷۱۸ + ۷۱۹ - ۷۲۰ + ۷۲۱ - ۷۲۲ + ۷۲۳ - ۷۲۴ + ۷۲۵ - ۷۲۶ + ۷۲۷ - ۷۲۸ + ۷۲۹ - ۷۳۰ + ۷۳۱ - ۷۳۲ + ۷۳۳ - ۷۳۴ + ۷۳۵ - ۷۳۶ + ۷۳۷ - ۷۳۸ + ۷۳۹ - ۷۴۰ + ۷۴۱ - ۷۴۲ + ۷۴۳ - ۷۴۴ + ۷۴۵ - ۷۴۶ + ۷۴۷ - ۷۴۸ + ۷۴۹ - ۷۵۰ + ۷۵۱ - ۷۵۲ + ۷۵۳ - ۷۵۴ + ۷۵۵ - ۷۵۶ + ۷۵۷ - ۷۵۸ + ۷۵۹ - ۷۶۰ + ۷۶۱ - ۷۶۲ + ۷۶۳ - ۷۶۴ + ۷۶۵ - ۷۶۶ + ۷۶۷ - ۷۶۸ + ۷۶۹ - ۷۷۰ + ۷۷۱ - ۷۷۲ + ۷۷۳ - ۷۷۴ + ۷۷۵ - ۷۷۶ + ۷۷۷ - ۷۷۸ + ۷۷۹ - ۷۸۰ + ۷۸۱ - ۷۸۲ + ۷۸۳ - ۷۸۴ + ۷۸۵ - ۷۸۶ + ۷۸۷ - ۷۸۸ + ۷۸۹ - ۷۹۰ + ۷۹۱ - ۷۹۲ + ۷۹۳ - ۷۹۴ + ۷۹۵ - ۷۹۶ + ۷۹۷ - ۷۹۸ + ۷۹۹ - ۸۰۰ + ۸۰۱ - ۸۰۲ + ۸۰۳ - ۸۰۴ + ۸۰۵ - ۸۰۶ + ۸۰۷ - ۸۰۸ + ۸۰۹ - ۸۱۰ + ۸۱۱ - ۸۱۲ + ۸۱۳ - ۸۱۴ + ۸۱۵ - ۸۱۶ + ۸۱۷ - ۸۱۸ + ۸۱۹ - ۸۲۰ + ۸۲۱ - ۸۲۲ + ۸۲۳ - ۸۲۴ + ۸۲۵ - ۸۲۶ + ۸۲۷ - ۸۲۸ + ۸۲۹ - ۸۳۰ + ۸۳۱ - ۸۳۲ + ۸۳۳ - ۸۳۴ + ۸۳۵ - ۸۳۶ + ۸۳۷ - ۸۳۸ + ۸۳۹ - ۸۴۰ + ۸۴۱ - ۸۴۲ + ۸۴۳ - ۸۴۴ + ۸۴۵ - ۸۴۶ + ۸۴۷ - ۸۴۸ + ۸۴۹ - ۸۵۰ + ۸۵۱ - ۸۵۲ + ۸۵۳ - ۸۵۴ + ۸۵۵ - ۸۵۶ + ۸۵۷ - ۸۵۸ + ۸۵۹ - ۸۶۰ + ۸۶۱ - ۸۶۲ + ۸۶۳ - ۸۶۴ + ۸۶۵ - ۸۶۶ + ۸۶۷ - ۸۶۸ + ۸۶۹ - ۸۷۰ + ۸۷۱ - ۸۷۲ + ۸۷۳ - ۸۷۴ + ۸۷۵ - ۸۷۶ + ۸۷۷ - ۸۷۸ + ۸۷۹ - ۸۸۰ + ۸۸۱ - ۸۸۲ + ۸۸۳ - ۸۸۴ + ۸۸۵ - ۸۸۶ + ۸۸۷ - ۸۸۸ + ۸۸۹ - ۸۹۰ + ۸۹۱ - ۸۹۲ + ۸۹۳ - ۸۹۴ + ۸۹۵ - ۸۹۶ + ۸۹۷ - ۸۹۸ + ۸۹۹ - ۹۰۰ + ۹۰۱ - ۹۰۲ + ۹۰۳ - ۹۰۴ + ۹۰۵ - ۹۰۶ + ۹۰۷ - ۹۰۸ + ۹۰۹ - ۹۱۰ + ۹۱۱ - ۹۱۲ + ۹۱۳ - ۹۱۴ + ۹۱۵ - ۹۱۶ + ۹۱۷ - ۹۱۸ + ۹۱۹ - ۹۲۰ + ۹۲۱ - ۹۲۲ + ۹۲۳ - ۹۲۴ + ۹۲۵ - ۹۲۶ + ۹۲۷ - ۹۲۸ + ۹۲۹ - ۹۳۰ + ۹۳۱ - ۹۳۲ + ۹۳۳ - ۹۳۴ + ۹۳۵ - ۹۳۶ + ۹۳۷ - ۹۳۸ + ۹۳۹ - ۹۴۰ + ۹۴۱ - ۹۴۲ + ۹۴۳ - ۹۴۴ + ۹۴۵ - ۹۴۶ + ۹۴۷ - ۹۴۸ + ۹۴۹ - ۹۵۰ + ۹۵۱ - ۹۵۲ + ۹۵۳ - ۹۵۴ + ۹۵۵ - ۹۵۶ + ۹۵۷ - ۹۵۸ + ۹۵۹ - ۹۶۰ + ۹۶۱ - ۹۶۲ + ۹۶۳ - ۹۶۴ + ۹۶۵ - ۹۶۶ + ۹۶۷ - ۹۶۸ + ۹۶۹ - ۹۷۰ + ۹۷۱ - ۹۷۲ + ۹۷۳ - ۹۷۴ + ۹۷۵ - ۹۷۶ + ۹۷۷ - ۹۷۸ + ۹۷۹ - ۹۸۰ + ۹۸۱ - ۹۸۲ + ۹۸۳ - ۹۸۴ + ۹۸۵ - ۹۸۶ + ۹۸۷ - ۹۸۸ + ۹۸۹ - ۹۹۰ + ۹۹۱ - ۹۹۲ + ۹۹۳ - ۹۹۴ + ۹۹۵ - ۹۹۶ + ۹۹۷ - ۹۹۸ + ۹۹۹ - ۱۰۰۰$$

(کلیر کا کالج - کیمبرج)

۲۲۳۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:

زیادہ نشانات ۱۰۰ منتز کئے گئے، ثابت کرو کہ جن مختلف طریقوں سے ایک طالب علم کل نشانات کا ۴۰ فیصدی حاصل کر سکتا ہے ان کی تعداد

$$= \left\{ \frac{42}{38} \times 15 + \frac{122}{139} \times 4 - \frac{225}{230} \right\} \frac{1}{5}$$

(اکسفورڈ میوز)

$$229 - \text{سلسلہ} \frac{6}{2} \times \frac{3 \times 1}{2 \times 2} + \frac{32}{4} \times \frac{4 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 4 \times 2 \times 2} + \frac{22}{11} \times \frac{11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}{12 \times 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2} + \dots$$

کے استحقاق کی جانچ کرو۔

۲۳۰۔ سلسلہ متواتر ۱ + ۶ + ۳۰ + ۲۸۸ + کا پیمانہ ربط کیا رقم اور ن رتوں کا حاصل جمع معلوم کرو۔

یہ ثابت کرو کہ اگر ایک ایسا سلسلہ بنایا جائے جسکی رتوں رقم سلسلہ بالا کی رتوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو تو موجودہ سلسلہ کی ن رتوں کا حاصل جمع

$$\frac{2}{3} (1 - 2^{n-1}) + \frac{2}{3} (1 - 2^{n-2}) - \frac{5}{21} n \quad (\text{کنیس کالج - کیمبرج})$$

۲۳۱۔ یہ معلوم ہے کہ کسی خاص مقام پر دو پہر کے وقت تین دنوں میں سے بلا وسط دو دن سورج ابدوں کی وجہ سے غائب رہتا ہے، بتاؤ کہ کسی ۵ مخصوص ایام مستقبل میں سے کم از کم چار دن دو پہر کے وقت سورج کے چلنے کا کیا امکان ہے۔
(کوئینز کالج - کیمبرج)

۲۳۲۔ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$\begin{cases} \text{لا} + (\text{ا} - \text{ی}) = \text{ا} \\ \text{ا} + (\text{ی} - \text{لا}) = \text{ب} \\ \text{ی} + (\text{لا} - \text{ا}) = \text{ج} \end{cases}$$

(ایمنول کالج - کیمبرج)

(کلیسٹکال کیمبرج)

۲۴۴۔ چار اعداد ایسے معلوم کرو کہ پہلے تیسرے اور چوتھے کا حاصل جمع دوسرے سے بقدر ۸ کے بڑا ہو۔ پہلے اور دوسرے کے مربعوں کا حاصل جمع تیسرے اور چوتھے کے مربعوں کے حاصل جمع سے بقدر ۳۶ کے بڑا ہو، پہلے اور دوسرے کے حاصل ضرب اور تیسرے اور چوتھے کے حاصل ضرب کا مجموعہ ۴۲ ہو اور نیز پہلے عدد کا کعب دوسرے آئیسرے اور چوتھے عددوں کے کعبوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو۔

۲۴۵۔ ایک متوالی سلسلہ ربط $1, 2, 3, \dots$ = $1, 2, 3, \dots$ - ب $1, 2, 3, \dots$ ہے جہاں اس کی تین متصل رتبیں $1, 2, 3$ ہیں ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

۲۴۶۔ معادلات ذیل میں سے لا، ما، می کو ساقط کرو:-

$$\begin{cases} \text{لا} + \text{ما} + \text{می} = \text{ب} \\ \text{لا} - \text{ما} + \text{می} = \text{ج} \end{cases} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

(ایمپوزل کالج کیمبرج)

۲۴۷۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا} - \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} - \text{لا} - \text{ر} = \frac{1}{\text{ف}}$$

کی اصلیں تناسب میں ہیں، اس لئے لا = ۱۲، لا = ۴، لا = ۲۴، لا = ۴۲، لا = ۴۴۔

۲۴۸۔ چاند ماری میں ۱۲ پانچ نشانوں میں سے ۴ نشانے چاند پر ٹھیک لگا سکتا ہے۔ ب چار نشانوں میں سے تین اور ج تین نشانوں میں سے دو ٹھیک لگا سکتا ہے۔ وہ سب ملکر ایک ساتھ نشانے مارتے ہیں۔ بتاؤ کہ کم از کم دو نشانوں کے ٹھیک لگنے کا کیا احتمال ہے اور اگر دو نشانے ٹھیک لگیں تو اس امر کا کیا احتمال ہے کہ ج کا نشانہ خطا ہوا۔

(سینٹ کیتھرین کالج کیمبرج)

$$\text{اور (ما + ی - لا) + (ی + لا - ما) + (لا + ما - ی) = ۲۴ ف - ۲۴ م}$$

$$\text{۲۵۳ - (ا + ب + ج) (لا + ب + ج + ا) + (ا + ج + ب) (ی + ا + ب) - (ا + ب + ج) (لا + ما + ی) = ۲۴ ف - ۲۴ م}$$

میں معلوم کرو۔

$$\text{۲۵۴ - ثابت کرو کہ } \left(\frac{لا + ما + ی}{لا + ما + ی} \right)$$

$$\left(\frac{لا + ما + ی}{۳} \right)$$

(سینٹ جوئز کالج کیمبرج)

$$\text{۲۵۵ - مساوات متاثر نہ کر کے } \frac{۱ + لا}{۱ - لا} = \frac{۱ + ی}{۱ - ی}$$

$$1 = \frac{1 - ر + ن}{1 - ر - ن}$$

(ایڈبرک کالج - کیمبرج)

۲۵۶ - ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$(۱) \quad لا + ب + ما + ی = ی + لا + ا + ب = ما + ی + ب + لا + ا = ۰$$

$$(۲) \quad \begin{cases} ۱۲ = لا + ما + ی - و \\ ۴ = لا + ما - ی - و \\ ۲۱۸ = لا + ما - ی + و \\ لا + ما + ی = ۲۵ \end{cases}$$

۲۵۷ - اگر $f = ق$ تقریباً اور $n < ۱$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{f(1+n)}{f(1-n)} = \frac{f(1-n) + f(1+n)}{f(1-n) - f(1+n)}$$

اگر f ۱۱ اعشاریہ کے سر دین مقام تک اس کے مساوی ہو تو بناؤ کہ اعشاریہ کے کون سے مقام تک یہ تقریب عام طور پر درست ہوگا۔
(ریاضی ٹرنی پاس)

۲۵۸۔ ایک عورت نے ۵۴ پونڈ وزن کی چائے اور کافی خریدی۔ اگر وہ چائے کی مقدار کا $\frac{1}{4}$ اور کافی کی مقدار کا $\frac{1}{2}$ خریدتی تو اس کو موجودہ قیمت خرید کا $\frac{1}{4}$ ادا کرنا پڑتا، اگر اس نے اتنی چائے خریدی ہوتی جتنی کہ کافی خریدی ہے اور اتنی کافی خریدی ہوتی جتنی کہ چائے خریدی ہے تو اس کو ۵ شلنگ زیادہ دینے پڑتے۔ چائے کافی کی نسبت زیادہ قیمتی ہے اور ۶ پونڈ کافی کی قیمت ۲ پونڈ چائے کی قیمت سے بعد ۵ شلنگ کے زیادہ ہے۔ چائے اور کافی کی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۵۹۔ اگر پہلے ن طبعی اعداد میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ج سے تقسیم کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}$$

کیٹس کالج۔ یکمبرج (۱)

۲۶۰۔ اگر $\frac{f}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{f}{a^2} + \frac{f}{b^2} + \frac{f}{c^2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{f}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{f}{a^2} + \frac{f}{b^2} + \frac{f}{c^2}$$

تو ثابت کرو کہ "ف"، "ق"، "ا" اور "ب" کو باہم بدل دینے سے تعادلات کی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا۔
۲۶۱۔ اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ اور $a + b + c = 3$ تو ثابت کرو کہ

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \text{ اور } a + b + c = 3$$

$$-(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

کیٹس کالج۔ یکمبرج (۱)

۲۶۲۔ اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ اور $a + b + c = 3$ تو ثابت کرو کہ

کیٹس کالج۔ یکمبرج (۱)

ثابت کرو کہ ان کُل لفظوں کی تعداد جو ن حرف صحیح اور حرف علت سے بن سکتے ہیں $\frac{۳+۱}{۲+۱} ۲$ ہے جبکہ ہر لفظ میں (۱) حرف علت ہو اور کوئی حرف ایک لفظ میں مکرر نہ آئے۔

(کیس کا ج - یکم بہر ج)

۲۷۲ — اگر لا + ما = ۲ می جہاں لا، ما، می اعداد صحیح ہیں تو

ثابت کرو کہ لا + ۲ = ر (ل + ۲ ل ک - ک) = ۲ = ر (ک + ۲ ل ک - ل)

۲ می = ر (ل + ک)

ر، ل، ک اعداد صحیح کو تعبیر کرتے ہیں۔

(کیس کا ج - یکم بہر ج)

۲۷۳ — سلسلہ $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۴} + \dots$ لانتاہی کو جمع کرو۔

۲۷۴ — سلسلہ ذیل کو جمع کرو (۱) $\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \dots$ لانتاہی

$$(۲) \frac{۱}{(۱+۱)} + \frac{۱}{(۲+۱)} + \frac{۱}{(۳+۱)} + \dots$$

۲۷۵ — معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱) ۱۲ + (۱ - می) (۱ + ما) (۱ - لا) = ۳ + لا می$$

$$= ۸۰ + (۱ + می) (۱ - ما) (۱ + لا) = ۷$$

$$(۲) ۳ ولا - ۲ و ما = ولا + و ما = ۳ و ۲ = و ما = ۱۰$$

| | | | |
|-------|-----|-----|-----|
| و + ل | و ب | و ج | و د |
| ب + و | ب ج | ب د | ب و |
| ج + و | ج ب | ج د | ج و |
| د + و | د ب | د ج | د و |

۲۷۶ — ثابت کرو کہ

۳۔ پر تقسیم ہو سکتا ہے دوسرا جزو ضربی معلوم کرو۔

(کار پس کالج کیمبرج)

۲۷۷۔ اگر a, b, c, \dots مساوات

$$a + \frac{a^2}{b} + \frac{a^3}{b^2} + \dots + \frac{a^n}{b^{n-1}} + \frac{a^{n+1}}{b^n} = 0$$

کی اصلیں ہوں تو $a^2 + b^2 + c^2 + \dots + \frac{a^n}{b^{n-1}} + \frac{a^{n+1}}{b^n}$ کا حاصل جمع معلوم کرو کہ اور نہ ثابت کرو کہ

$$\frac{a^2}{b} + \frac{a^3}{b^2} + \frac{a^4}{b^3} + \frac{a^5}{b^4} + \frac{a^6}{b^5} + \frac{a^7}{b^6} + \dots$$

$$= \frac{a^2 - (a^2 - a^3)}{b} - \frac{a^3 - (a^3 - a^4)}{b^2} - \dots$$

(سینٹ ہنز کالج کیمبرج)

۲۸۸۔ $\frac{2n+1}{3n-1}$ کی تفصیل سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ

$$\frac{(3-2n)(2-3n)(1-3n)}{3 \times 2 \times 1} - \frac{(2-3n)(1-3n)}{2 \times 1} + 3 - 1$$

$$= \dots - \frac{(3-2n)(2-3n)(1-3n)}{3 \times 2 \times 1} + (1-3n)$$

جہاں n کوئی صحیح عدد ہے اور سلسلہ پہلی رقم پر جو معدوم ہو جائے ختم ہو جاتا ہے۔
(ریاضی ٹرائی پاس)

۲۸۹۔ دو شکاری A اور B شکار کھیلنے نکلے اور ۱۰ پرندے مار کر لائے دونوں

نے جتنے نشانے مارے اُن کے مربعوں کا حاصل جمع ۲۸۸۰ ہے، دونوں

کے نشانوں کا حاصل ضرب دونوں کے پرندوں کے حاصل ضرب کا ۸ گنا ہے۔

اگر B اتنے نشانے مارتا جتنے A نے مارے اور A اتنے مارتا جتنے B نے

مارے ہیں تو B ، A کی نسبت ۵ زیادہ پرندے مارتا۔ بتاؤ کہ ہر ایک نے کتنے

۲۸۵۔ اگر n ، m ۔ اکی شکل کا ہو تو ثابت کرو کہ $(a - y)^n + (y - a)^n$
 پر تقسیم ہو سکتا ہے $(a + y)^n + (y + a)^n - (a - y)^n - (y - a)^n$ پر اور اگر n ،
 m کی شکل کا ہو تو ثابت کرو کہ یہ پر تقسیم ہو سکتا ہے

$(a + y)^n + (y + a)^n - (a - y)^n - (y - a)^n$ پر۔

۲۸۶۔ اگر n متاویز a, b, c, \dots, n کی m دین تو توں کا مجموعہ
 ج ہو اور ان متاویز میں سے m کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $ض$ ہو تو ثابت کرو
 کہ $(n - 1) \times (ج) < (n - 1) \times (ض)$ (کیس کا بچ کیہرج)

۲۸۷۔ ثابت کرو کہ اگر مساواتیں

$$a + b = c - d = e$$

اور $a - b = c - d = e$ کی اصل مشترک ہو تو پہلی مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی اور اگر ان
 مساوی اصلوں میں سے ہر ایک a کے مساوی ہو تو دوسری مساوات کی اصلیں
 دریافت کرو۔ (انڈیا سول سروس)

۲۸۸۔ اگر $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ ۔

جہاں $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ کو تبخیر کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z) = 0$$

(ٹرنٹی کلج - کیہرج)

۲۸۹۔ $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ کی قیمتیں معلوم کرو جو ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو

پورا کرتی ہیں -

$$1 = \frac{لا}{ب-ب} + \dots + \frac{لا}{ب-ب} + \frac{لا}{ب-ب}$$

$$1 = \frac{لا}{ب-ب} + \dots + \frac{لا}{ب-ب} + \frac{لا}{ب-ب}$$

$$1 = \frac{لا}{ب-ب} + \dots + \frac{لا}{ب-ب} + \frac{لا}{ب-ب} \quad (\text{دش دن پو پورستی})$$

$$290 - \text{ثابت کردہ} \begin{vmatrix} \text{ما-لا} & \text{ما-لا} & \text{ما-لا} \\ \text{ما-لا} & \text{ما-لا} & \text{ما-لا} \\ \text{ما-لا} & \text{ما-لا} & \text{ما-لا} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{لا-ما} & \text{لا-ما} & \text{لا-ما} \\ \text{لا-ما} & \text{لا-ما} & \text{لا-ما} \\ \text{لا-ما} & \text{لا-ما} & \text{لا-ما} \end{vmatrix}$$

جہاں $ر = لا + ما + می$ اور $و = می + ی + لا + لا$

(رٹنی کلج کی مہرج)

۲۹۱ - ایک کام کو ا، ب، ج نے مل کر ختم کیا، پہلے ا اکیلا کام کرتا رہا کچھ دنوں کے بعد ب شامل ہوا اور پھر کچھ دنوں کے بعد ا اور ب کے ساتھ ج بھی شامل ہو گیا۔ جتنے دن ب اور ج نے جداگانہ کام کیا ہے اگر ان میں سے ہر ایک اس سے دگنے دن کام کرتا تو دونوں مل کر کام ختم کر سکتے تھے، اگر ا اپنے ایام کار کی تعداد کے ۲ دن کام کرتا اور ج اپنے ایام کار کی تعداد کے ۴ گنا دن کام کرتا تو دونوں اس کام کو ختم کر سکتے تھے، یا اگر ا اور ب بغیر ج کی مدد کے ۴۰ دن کام کرتے تو بھی کام ختم ہو سکتا تھا یا اگر تینوں ملکر اتنے دن کام کرتے جتنے دن ب نے کیا ہے تو بھی کام ختم ہو جاتا۔ ب کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا اور ج کے شامل ہونے سے پہلے جتنے دن کام ہوتا رہا ہے ان کی نسبت ۳:۲ ہے۔

بتاؤ کہ ہر ایک آدمی نے کتنے دن کام کیا۔

۲۹۲ - ثابت کردہ اگر مقادیر

شروع کرتا ہے اور پہلے دن اپنی معمولی محنت اور ورزش سے شروع کرتا ہے۔ اس نے
 دیکھا کہ نسخہ میں کل ۲۳۲۰۰۰ الفاظ ہیں، پہلے دن اُس نے ۱۲۰۰۰ الفاظ
 پڑھے اور آخری دن ۷۲۰۰۰، نیز نصف محنت کے آخر تک اس نے کل ۶۲۰۰۰
 لفظ پڑھے اُس کی روزانہ ورزش اور کام کی معمولی مقداریں دریافت کرو۔

—————

جوابات

(*)

جبر و مقابلہ حصہ دوم

اشکل نمبری ۱۸ (ا) (صفحات ۷۸۵)

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| ۱ - ۱۱۴۶ پونڈ ۱۴ شلنگ ۱۰ پینس | ۲ - ۴۲۰ پونڈ |
| ۳ - ۲۴۵ سال | ۴ - ۶۶۸ پونڈ ۷ شلنگ ۱۰ پینس |
| ۵ - ۹۵۶ سال | ۸ - ۴۹۶ پونڈ ۹ شلنگ ۲ پینس |
| ۹ - ۷ سال سے کچھ کم | ۱۰ - ۱۱۹ پونڈ ۸ شلنگ ۲ پینس |

اشکل نمبری ۱۸ (ب) (صفحات ۱۴ تا ۱۷)

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| ۱ - ۶ فی صدی | ۲ - ۳۱۳۷ پونڈ ۲ شلنگ ۲ پینس |
| ۳ - ۱۱۰ پونڈ | ۴ - ۳ فی صدی |
| ۶ - ۱۲۷۵ پونڈ | ۵ - ۲۸ سال |
| ۸ - ۶۷۵۵ پونڈ ۱۳ شلنگ | ۶ - ۹۲۶ پونڈ ۲ شلنگ |
| ۱۰ - ۳ ۱/۵ فی صدی | ۹ - ۱۸۳ پونڈ ۱۸ شلنگ |
| ۱۳ - ۱۳۰۸ پونڈ ۱۲ شلنگ ۲ پینس | ۱۱ - ۶۱۶ پونڈ ۹ شلنگ ۱ پینس |
| | ۱۵ - ۴۲۰۰ پونڈ |

اشکالہ نمبری ۱۹ (ا) (صفحات ۲۶ تا ۲۸)

- ۸- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ بڑا ہے ۱۲- $\sqrt{2} < \sqrt{3} + \sqrt{2}$ یا $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{2}$ جبکہ $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{2}$
 ۱۴- $\sqrt{2}$ کی بڑی سے بڑی قیمت ۱ ہے - ۱۵- $\sqrt{2}$ ۸
 ۲۲- $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ جب کہ $\sqrt{2} = 3$ ۲۳- ۹ جبکہ $\sqrt{2} = 1$

اشکالہ نمبری ۱۹ (ب) (صفحات ۳۲ تا ۳۵)

$$10 - \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} ; \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$$

اشکالہ نمبری ۲۰ (صفحات ۴۶ تا ۴۸)

- ۱- $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ۲- $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}$ ۳- $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$
 ۴- $\frac{1}{8} - \frac{1}{10}$ ۵- $\frac{1}{12} - \frac{1}{15}$ ۶- $\frac{1}{18} - \frac{1}{20}$
 ۸- $\frac{1}{24} - \frac{1}{30}$ ۹- $\frac{1}{36} - \frac{1}{40}$ ۱۰- $\frac{1}{48} - \frac{1}{50}$
 ۱۲- $\frac{1}{60} - \frac{1}{70}$ ۱۳- $\frac{1}{84} - \frac{1}{90}$ ۱۴- $\frac{1}{108} - \frac{1}{120}$
 ۱۶- $\frac{1}{144} - \frac{1}{160}$

اشکالہ نمبری ۲۱ (ا) (صفحات ۶۶ تا ۶۸)

۱- مستحق ۲- مستحق ۳- مستحق

۴- لا > 1 یا لا $=$ مستحق ؛ لا < 1 تنوع

۵- نتیجہ مثال (۴) کے مطابق ہے - ۶- مستحق - ۷- تنوع

- ۸۔ لا > مستدق ؛ لا < ای لا = اتسع
 ۹۔ تسع جب تک ق < ۲ نہ ہو۔ ۱۰۔ لا > ای لا = استدق ؛ لا < اتسع
 ۱۱۔ اگر لا > استدق ؛ لا < ای لا = اتسع۔ ۱۲۔ نتیجہ مثال (۱۱) کے مطابق ہے۔
 ۱۳۔ تسع جب تک ق < ۱ نہ ہو۔ ۱۴۔ لا > ای لا = استدق ؛ لا < اتسع
 ۱۵۔ مستدق ۱۶۔ تسع ۱۷۔ تسع (۱) مستدق
 ۱۸۔ (۱) تسع (۲) مستدق :-

امثلہ نمبری ۲۱ (ب) (صفحات ۸۲ تا ۸۴)

- ۱۔ لا > ای لا = مستدق ؛ لا < اتسع
 ۲۔ نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے۔ ۳۔ نتیجہ مثال (۱) کے مطابق ہے
 ۴۔ لا > $\frac{1}{2}$ یا لا = $\frac{1}{2}$ مستدق ؛ لا < $\frac{1}{2}$ تسع
 ۵۔ لا > و مستدق ؛ لا < و یا لا = و تسع
 ۶۔ لا > مستدق ؛ لا < ای لا = اتسع ۷۔ تسع
 ۸۔ لا > $\frac{1}{2}$ مستدق ؛ لا < $\frac{1}{2}$ یا لا = $\frac{1}{2}$ تسع
 ۹۔ لا > مستدق ؛ لا < اتسع۔ اگر لا = ۱ اور اگر ج۔ ع۔
 مثبت ہو تو مستدق۔ اور اگر ج۔ ع۔ بہ منفی یا صفر ہو تو تسع۔
 ۱۰۔ لا > مستدق ؛ لا < ای لا = اتسع۔ یہ نتائج ق کی تمام قیمتوں
 پر صادق آتے ہیں خواہ مثبت ہو یا منفی۔
 ۱۱۔ و منفی یا صفر مستدق ؛ و مثبت تسع۔

امثلہ نمبری ۲۲ (ا) (صفحات ۹۱ تا ۹۳)

$$۱۔ \frac{1}{n} (۳ - n) \quad ۲۔ \frac{1}{n} (۱ + n) \quad (۲ + n) \quad (۳ + n)$$

$$-۵ - 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{(1-y)5} - \frac{1}{(3+2y)5}$$

$$-۶ - \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2+y} - \frac{3}{2(2+y)}$$

$$-۷ - (2-y) + \frac{14}{(3-y)14} - \frac{11}{(1+y)14} - \frac{14}{(1+y)14}$$

$$-۸ - \frac{1}{3-y} - \frac{3}{5-y} - \frac{9}{5-y} - \frac{15}{5+y} - \frac{2+y}{1+y}$$

$$-۱۰ - \frac{3}{1-y} + \frac{1}{(1-y)} + \frac{4}{(1-y)} - \frac{5}{(1-y)}$$

$$-۱۱ - \frac{2}{(1+y)} + \frac{3}{(1+y)} - \frac{2}{(1+y)} + \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}$$

$$-۱۲ - \frac{1}{(y^2+1)3} - \frac{2}{(y^2+1)3} - \frac{1}{(y^2+1)3} - \frac{1}{(y^2+1)3}$$

$$-۱۳ - \frac{11}{(y-1)3} - \frac{1}{(y+2)3} - \frac{1}{(y+2)3} - \frac{1}{(y+2)3}$$

$$-۱۴ + 1 - \frac{4}{(5+y)3} - \frac{4}{(2+y)3} - \frac{4}{(2+y)3} - \frac{4}{(2+y)3}$$

$$-۱۵ - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y-1}$$

$$-۱۶ - \frac{1}{(y-1)3} - \frac{1}{(y-1)3} - \frac{1}{(y-1)3} - \frac{1}{(y-1)3}$$

$$-۱۷ - \frac{1}{(y^2-1)3} + \frac{1}{(y^2-1)3} - \frac{1}{(y^2-1)3} - \frac{1}{(y^2-1)3}$$

$$-۱۸ - \frac{2}{y+1} + \frac{2}{y+1} - \frac{2}{y+1} - \frac{2}{y+1}$$

$$-۱۹ - \frac{3}{(1-y)2} + \frac{3}{(1-y)2} - \frac{3}{(1-y)2} - \frac{3}{(1-y)2}$$

$$۲۰ - \frac{۲}{(۲-۱)} + \frac{۳}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۳(۲-۱)} - \frac{۲}{۱(۱+۲)}$$

$$۲۱ - \frac{۱}{(۱-۱)(۱-۲)} + \frac{۱}{(۱-۲)(۱-۳)} + \frac{۱}{(۱-۳)(۱-۴)}$$

$$۲۲ - \frac{۲}{(۲-۱)} + \frac{۱}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲-۲} - \frac{۵}{۲(۲-۲)}$$

$$۲۳ - \frac{۱}{(۱-۱)} \left\{ \frac{۱}{۲+۱} - \frac{۱}{۱+۵} \right\}$$

$$\frac{۱}{(۲-۱)} \left\{ \frac{۱}{۲+۱} + \frac{۱}{۲+۱} - \frac{۱}{۲+۱} - \frac{۱}{۲+۱} \right\}$$

$$۲۴ - \frac{۱}{(۲-۱)(۲-۱)} - \frac{۱}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۲(۲-۱)}$$

مثلاً نمبری ۲۴ - (صفحات ۱۱۹ تا ۱۲۱)

$$۱ - \frac{۱}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)}$$

$$۳ - \frac{۳}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)}$$

$$۵ - \frac{۵}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)}$$

$$۶ - \frac{۶}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)}$$

$$۸ - \frac{۸}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)}$$

$$۹ - \frac{۹}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)} - \frac{۲}{۲(۲-۱)} + \frac{۲}{۲(۲-۱)}$$

$$\begin{aligned} 9- & \frac{1}{3} + \frac{1}{+1} + \frac{1}{+6} + \frac{1}{+9} + \frac{1}{+2} + 1 - 9 \\ & \frac{252}{222} \quad ; \quad \frac{1}{10} + \frac{1}{+1} + \frac{1}{+2} + \frac{1}{+1} + \frac{1}{+4} + \frac{1}{+3} + \frac{1}{+3} + \frac{1}{+3} - 10 \\ & \frac{43}{208} \quad ; \quad \frac{259}{60} \quad ; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{+4} + \frac{1}{+3} + 11 - 11 \\ & \frac{26}{192} \quad ; \quad \frac{39}{161} \quad ; \quad \frac{8}{22} \quad ; \quad \frac{4}{29} \quad ; \quad \frac{1}{2} - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14- & \text{ن} - 1 + \frac{1}{1+\text{ن}} + \frac{1}{+(1-\text{ن})} + \frac{1}{+(1+\text{ن})} \\ & \frac{\text{ن} - 1}{1} \quad , \quad \frac{\text{ن}^2}{1+\text{ن}} \quad , \quad \frac{\text{ن}^2 - \text{ن} + 1 - \text{ن}}{\text{ن}^2} \text{ ہیں۔} \end{aligned}$$

اشکال نمبری ۲۵ (ب) (صفحات ۱۴۱ تا ۱۴۲)

$$\begin{aligned} 1- & \frac{1}{2(203)} \text{ اور } \frac{1}{2(125-2)} - 2 - \frac{151}{115} \\ 2- & \frac{1}{2+1} + \frac{1}{+(2+1)} + \frac{1}{+(1+1)} + \frac{1}{2+1} - 2 \\ & \frac{2+1}{2+1} + \frac{2+1}{2+1} + \frac{2+1}{2+1} + \frac{2+1}{2+1} \end{aligned}$$

اشکال نمبری ۲۶ (صفحات ۱۵۲ تا ۱۵۳)

$$\begin{aligned} 1- & \text{لا} = 11 + د = 100 + د \text{ اور ما} = 45 + د = 109 \quad ; \\ & 109 = 100 + د \text{ اور ما} = 109 \\ 2- & \text{لا} = 59 + د = 43 \text{ اور ما} = 55 + د = 43 \quad ; \\ & 43 = 55 + د \text{ اور ما} = 43 \end{aligned}$$

۳۔ (۷) = ۳۹۳ + ۲۲۰ اور ۳۵۵ + ۲۲۶ = ۵۸۱
(۷) = ۲۲۰ اور ۳۵۵ =

۴- چار ۵- سات ۶- ۷

$$\frac{2}{12} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{64}$$

۸- ۶ یونہ ۱۳ شنگ ۹- ۷ = ۹ = ۸ = ۷ = ۶ = ۵ = ۴ = ۳

۱- لا = ما' ۶ = ی' ۷ = لا - ۱۱ = م' ۲ = ی' ۳ = لا

$$4 = 5'9 = 6'2 = 7-12$$

$$3'2'2'1' = 5 : 5'1'1'1'1' = 6 : 1'4'2'6'3' = 2-13$$

$$3'4'5' = 5 \quad 2'1'5' = 6 \quad 2'2'1' = 7-14$$

$$M'(1) = 14 \text{ gr} + 2 \text{ ml} = 16$$

۱۶۔ عشری ۲۲۸، سببی ۵۰۳، تسبی ۳۰۵

$$۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱ = ب : ۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱ = ۱-۱۸$$

۱۹۔ کسی سرے سے شروع کر کے ایک سو ساتواں اور ایک سو چوتھا نشان۔

۲۰۔ پہلی دفعہ کے علاوہ ۵۰، ۴۱، ۳۵ دفعہ بجا۔

۱۳۴۳ و ۱۸۲۹ - ۲۳ ۸۹۹ - ۲۲ ۲۲۵ - ۲۱

اشعار نمبر ۲۷ (۱) (صفحہ ۱۶۰ تا ۱۶۱)

$$\frac{2009}{1992} : \dots \frac{1}{+2} + 2 - 2 \quad \frac{24}{10} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 1 - 1$$

$$\frac{99}{25} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 2 - 2 \quad \frac{285}{198} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} + 2 - 3$$

$$\frac{296}{1192} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} + 2 - 5$$

$$\frac{119}{23} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 2 - 9$$

$$\frac{119}{31} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 2 - 6$$

$$\frac{196}{22} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 2 - 8$$

$$\frac{158}{25} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 5 - 10 \quad \frac{1351}{290} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} + 2 - 9$$

$$\frac{171}{22} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} + 4 - 11$$

$$\frac{232}{20} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+5} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 12 - 12$$

$$\frac{12}{55} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} - 13$$

$$\frac{5291}{282} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 1 - 15 \quad \frac{26}{260} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+5} - 12$$

$$\frac{280}{251} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} - 14$$

$$\frac{1}{(229)2} \text{ اور } \frac{1}{2(191)} - 18 \quad \frac{1}{2(528)2} \text{ اور } \frac{1}{2(65)} - 16$$

$$\dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} - 21 \quad \frac{1466}{232} - 20 \quad \frac{202}{201} - 19$$

$$\dots \frac{1}{+1} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} + 1 - 23 \quad \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} \frac{1}{+1} + 2 - 22$$

$$\frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} \frac{1}{+1} : \dots \frac{1}{+2} \frac{1}{+2} + 2 - 22$$

$$24 - 23 = 1 \text{ کی مثبت اصل}$$

$$26 - 23 = 3 \text{ کی مثبت اصل} \quad 28 - 27 = 1 \text{ کی مثبت اصل} \quad 30 - 29 = 1 \text{ کی مثبت اصل}$$

اشکله نمبری ۳۰ (ا) (صفحات ۲۵۲ تا ۲۵۵)

$$۱-۳'۱۵'۴'۳-۳-۱۶۱۷'۱۸۰'۱۸۵۹'۱۸-۴-۲۸$$

$$۶-۲۳-۳۳-۸۹۸۷$$

اشکله نمبری ۳۰ (ب) (صفحات ۲۶۱ تا ۲۶۸)

$$۲۰-۹ = ۱۳۹ + ۶۱ \text{ جہاں د ایک صحیح عدد ہے۔}$$

اشکله نمبری ۳۱ (ا) (صفحات ۲۸۶ تا ۲۸۹)

$$۲-۱ + \frac{1}{۳} - \frac{1}{۲} + \frac{1}{۱۸} - ۱۸ = ۱ \text{ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ لہ = ا ب ق}$$

اشکله نمبری ۳۲ (ا) (صفحات ۳۰۰ تا ۳۰۱)

$$۱- (۱) \frac{1}{۹} ؛ (۲) \frac{۵}{۳۶} - ۲ - \frac{۸}{۶۶۲} - ۳ - \frac{۱}{۵۶} - ۴ - \frac{۳}{۸}$$

$$۵-۲ تا ۳ - ۴ - \frac{۲}{۲۷۰۷۲۵} - ۸ - ۲۲ تا ۲۳ - ۹ - ۳۰ : ۲۵ :$$

$$۱۰- \frac{۲۱۹۷}{۲۰۸۲۵} - ۱۱ - ۹۵۲ تا ۷۱۵ - ۱۲ - ۱۴ - ۱۵ - \frac{۲}{۷}$$

$$۱۶- \frac{۱۱}{۲۱۶۵} - ۱۷ - \frac{ن (۱-ن)}{(۱-ن+م)(ن+م)}$$

اشکله نمبری ۳۲ (ب) (صفحات ۳۱۲ تا ۳۱۵)

$$۱- \frac{۵}{۳۶} - ۲ - \frac{۱۶}{۵۵۲۵} - ۳ - \frac{۵۲}{۷۷} - ۴ - \frac{۱۴}{۲۱} - ۵ - \frac{۸}{۱۵}$$

$$۶- \frac{۷۲}{۲۸۹} - ۷ - (۱) \frac{۲۱۹۷}{۲۰۸۲۵} ؛ (۲) \frac{۲۸۱۴}{۲۱۶۵} - ۸ - \frac{۲۲۵۱}{۷۷۷} - ۹$$

$$\begin{array}{l}
 ۹ - \frac{۲۰۹}{۳۳۳} - ۱۰ - \frac{۱}{۲} - ۱۱ - \frac{۹۱}{۲۱۶} - ۱۳ - \frac{۱}{۱۹} - ۱۴ - \frac{۶۳}{۲۵۶} \\
 ۱۵ - \frac{۱}{۳۲} - ۱۶ - \frac{۱۶}{۳۲} - \frac{۱۲}{۳۲} - \frac{۹}{۳۲} - ۱۷ - \frac{۲۲}{۳۵} - \frac{۱۳}{۳۵} \\
 ۱۸ - ۲۳ - ۱۹ - ۱۳ - ۵ - ۲۰ - \frac{۲۵۹۲۴}{۵۰۰۰۰}
 \end{array}$$

اشکال نمبری ۳۲ (ج) (صفحات ۲۲۲ تا ۲۲۶)

$$\begin{array}{l}
 ۱ - \frac{۲۱۳۳}{۲۱۲۵} - ۲ - \frac{۵}{۱۶} - ۳ - \frac{۴}{۹} - ۴ - \text{ظاہرین} - ۵ - \frac{۱}{۲} \\
 ۶ - \text{اشکال} - \frac{۲}{۵} \text{ پیش} - ۷ - \frac{۴}{۳۳} - ۸ - \frac{۴}{۴۲} - ۹ - ۱۱ تا ۵ \\
 ۱۰ - \frac{۱}{۸} - ۱۱ - \text{اوپر پونڈ} ؛ \text{ب} \text{اوپر پونڈ} - ۱۲ - \frac{۲}{۲۲} - ۱۳ - \frac{۴}{۵} \text{ اشکال} \\
 ۱۴ - (۱) \frac{۲۵۰}{۲۴۴۶} ؛ (۲) \frac{۲۴۶}{۲۴۴۶} - ۱۵ - ۲ پیش - ۱۶ - \frac{۴}{۳} \\
 ۱۷ - م + \frac{۱}{۲} م
 \end{array}$$

اشکال نمبری ۳۲ (د) (صفحات ۲۲۸ تا ۲۴۱)

$$\begin{array}{l}
 ۱ - \frac{۲}{۵} - ۲ - \frac{۱}{۵} - ۳ - \frac{۱۲}{۱۲} - ۴ - \text{ب} - \frac{۲}{۵} ؛ \text{ج} - \frac{۴}{۱۵} \\
 ۵ - \frac{۲}{(۱+۲)} - ۶ - \frac{۳۲}{۳۱} - ۷ - \frac{۳۴۴}{۵۵۰} - ۸ - ۲ اشکال - ۳ پیش \\
 ۹ - \frac{۱}{۵} - ۱۰ - \frac{۱}{۳} - ۱۱ - \frac{۴}{۳۱} - ۱۲ - \frac{۱۱}{۵} - ۱۳ - \text{اوپر پونڈ} \\
 ۱۴ - (۱) \frac{۲}{۵} ؛ (۲) \frac{۴}{۸} - ۱۵ - ۸ پونڈ - ۱۶ - \frac{۱-۲}{۱-۲} - \frac{۱-۲}{۱-۲} \\
 ۱۸ - \frac{۱۳}{۱۴}
 \end{array}$$

اشکال نمبری ۳۲ (ر) (صفحات ۳۵۰ تا ۳۵۶)

- ۱- ۴ تا ۵ - ۲ - $\frac{1}{124}$ - ۳ - $\frac{12393}{12500}$ - ۵ - $\frac{245}{500}$
- ۴- ۱ : $\frac{5}{4}$: $(\frac{5}{4})^2$: $(\frac{5}{4})^3$ - ۶ - $\frac{14}{21}$
- ۸- ۴ ہر ایک $\frac{1}{4}$ کے برابر ۹ - $\frac{13}{28}$ - ۱۰ - $\frac{222}{1495}$ - ۱۱ - ۱۱ تا ۱۵
- ۱۳- ۱ $\frac{149}{222}$ ؛ ب $\frac{155}{222}$ - ۱۲ - $\frac{1}{2}$ - ۲۱ - $\frac{2}{214}$ - ۱۶ - $\frac{25}{214}$
- ۱۴- $\frac{129}{2001}$ - ۱۸ - $\frac{23}{1000}$ ؛ $\frac{1}{40}$ - ۲۰ - ایک گنی Guinea
- ۲۲- $\frac{120}{121}$ - ۲۳ - $\frac{n(n+1)}{2}$ - ۲۶ - ۱۱۵
- ۲۸- $\frac{1}{27}$ - ۲۹ - $\frac{1}{27}$ - ۳۰ - $\frac{1265}{1284}$ ؛ $\frac{5084}{5127}$ پونڈ
- ۳۱- $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ - ۳۲ - اگر ب $\frac{1}{4}$ تو احتمال ۱-۲ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ ہے
اگر ب $\frac{1}{4}$ تو احتمال ۲-۳ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ ہے

اشکال نمبری ۳۳ (ا) (صفحات ۳۷۲ تا ۳۷۶)

- ۱- ۷ - ۲ - صفر - ۳ - ۱
- ۴- ۱ ب ج + ۲ ف گ - ۵ - ۱ ف - ۶ - ب گ - ۷ - ج ہ
- ۵- ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰
- ۹- صفر - ۱۰ - ۳ - ۱۱ - ۲ ب ج - ۱۲ - ب - ۱۳ - ج = ۰
- ۱۳- (۱) لا = ۱ یا ب ؛ (۲) لا = ۲

| | | | |
|-------|-------|-------|-----|
| ج | ب | ب + ج | ۴۰- |
| بج | ج + ب | ب | |
| ب + ج | ج ب | ج | |

۴۴- ل (ل + ر + ب + ج)

۲۶۔ مقطع

| | | | | | |
|---|---|---|---|------|------|
| ل | ر | ا | خ | ۲۔ ل | ۲۔ ل |
| ب | ب | ا | ا | ۲۔ م | ۲۔ م |
| ج | ج | ا | ا | ۲۔ ی | ۲۔ ی |

کے برابر ہے

۲۶- | ر ج ب | ر ج ب | = ۲۸- | ر ج ب | ر ج ب | ÷ | ر ج ب | ر ج ب |

امثلہ نمبری ۳۳ (ب) (صفحات ۳۸۴-۳۸۵)

۱-۱۔ صفر؛ جمع کروہیلی اور دوسری قطار اور تیسری اور چوتھی قطار۔

$$3 - (1 + j)(2 + j) - 4 - j + b' + c' - 2b - j - 2j$$

۵-۶: پہلے ستون میں سے تیسرا ستون ۳ دفعہ تفریق کر دے دوسرے ستون میں سے تیسرا ستون ۲ دفعہ تفریق کر دے اور چوتھے میں سے تیسرا چار دفعہ تفریق کر دے۔

۶۔ (ب ج د) $(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a})$

$$6. - (y + m + y)(y + m - y)(y + m - y)(y + m - y)(y + m - y)(y + m - y)$$

۸۔ (زلا۔ ب ما + جی) ۹۔ ۹

$$12-9 = \frac{(ک-ب)(ک-ج)}{(1-1)(1-1)} \text{؛ غیر } 13-9 = \frac{ک(ک-ب)(ک-ج)}{(1-1)(1-1)}$$

$$۱۴-۹ = \frac{(رک - ب) (رک - ج)}{(ر - ۱) (ج - ۱)}$$

اشکال نمبری ۳۴ (۱) (صفحات ۱۰۴ تا ۱۰۵)

$$r_k = \psi + \int r - \psi \quad 1.2 - 1$$

3-5-2-1-6-11

$$\therefore {}^{\circ}\bar{v}_5 + {}^{\circ}\bar{v}_4 + {}^{\circ}\bar{v}_3 + {}^{\circ}\bar{v}_2 = 1.4$$

$${}^1\text{C}_{12} + {}^2\text{C}_9 + {}^3\text{C}_{10} - {}^4\text{C}_{12}$$

۶- (ب-ج) (ج-ا) (ا-ب) (ب+ج+ا)

۴- (ب-ج) (ج-ا) (ا-ب) (ب+ج) (ج+ا) (ا+ب)

۸-۲۲ ا ب ج ۹ - (ب + ج) (ج + ب) (ب + ج) (ج + ب)

۱۰۔ (ب-ج) (ج-ا) (ا-ب) ((آ+ب'+ج'+ب+ج+ا)+(اب))

۱۱-۳ لب ج (ب + ج) (ج + ج) (ج + ب) (ب + ب)

۱۲-۱۳۔ اب ج (ا + ب + ج) ۱۳-۸۰۔ اب ج (ا' + ب' + ج')

۱۳-۴ (ب-ج) (ج-د) (د-ه) (ه-و) (و-ز) (ز-ح) (ح-ط) (ط-ث) (ث-ج)

$$r - 29 \quad \frac{y}{(j-1)(b-1)(j-1)} - 28$$

$$۳۰. - \frac{(ف-۷) (ق-۷)}{(۷+۷) (۷+ج+۷)} - ۳۱ - ۳۲ - ۱ + ب + ج + د$$

اشکال نمبری ۳۴ (ب) (صفحات ۸۶ تا ۱۰۴)

۵- صفر ۴- ۸ = زلا + ب ما + زما = ما = ب لا - زما

۲۸۔ (ج + ب) (ب + ج) (ج + ب)

اشک نجیری ۳۴ (ج) (صفحات ۲۱۹ تا ۲۱۹)

$$1- لا^2 + لا ما^2 + ما^2 = 2- لا + لا^2 = 3- لا + ما^2 = 4$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} - y_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۴۔ ب ج + ج و + و ب = و ب ج د

$$n - m = \text{مأ} - \text{ن} = \text{ك}'(ا + ا) - 9 - 7 - 2 - 3 = 0$$

$$= 10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = 5$$

$$1 = \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{1}{2+1} - 11$$

۱۲- ۵ زب = ۶ ج ۱۳- ۱ ب = ۱ ج + ۱

$$14 - 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 15 - 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5$$

$$17- \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} \pm 12 \text{ ا ب ج} = 16- \text{ا ب ج} = (1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17)$$

۱۸۔ ژ - ۴ لوبج + لوج + ۴ بآ - بآج = ۰

۲۰۔ ج (ا + ب - ا) - ج (ا + ب - ا) (ج - ا + ب + ج - ا + ب - ا) (ج - ا + ب + ج - ا + ب - ا) = ج +

$$22. \frac{1}{(b-j) + (b-j)} + \frac{1}{(b-j) + (b-j)}$$

$$\frac{1}{\text{بج ق ر} + \text{ج و ر ف} + \text{ر ب ن ق}} = \frac{1}{\text{ر ج} + \text{و ا ب ق} + \text{ب ا ر ف}} +$$

| | | |
|---------------|-----------|-----------|
| ۲۳- رِب - رِب | رَج - رَج | رِد - رِد |
| رَج - رَج | رِد - رِد | رِب - رِب |
| رِد - رِد | رِب - رِب | رَج - رَج |

$$۱۶-۱۴ \pm ۴'۱ - \sqrt{۱۵} \pm \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۳}{۲} - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

$$۱۸-۱۷ \pm ۴'۱ - \sqrt{۱۵} \pm \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۳}{۲} - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

$$۲۲-۲۱ \pm ۴'۱ - \sqrt{۱۵} \pm \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۳}{۲} - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

$$۲۳-۲۲ \pm ۴'۱ - \sqrt{۱۵} \pm \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۳}{۲} - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

$$۲۵-۲۴ \pm ۴'۱ - \sqrt{۱۵} \pm \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۳}{۲} - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

$$۲۸-۲۷ \pm ۴'۱ - \sqrt{۱۵} \pm \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۳}{۲} - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

اگر لا = ۴ - ما ہو تو جملات لا - ۵ + لا + ۵ اور لا - ۳ + لا + ۱ علی الترتیب

ما - ۳ + لا + ۱ اور ما - ۵ + لا + ۵ بن جاتے ہیں۔ اس طرح ہم نے صرف

اصل مساوات کو پھر حاصل کر لیا ہے۔

متفرق مثالیں (صفحات ۹، ۴، ۴، ۴، ۵۲)

$$۲-۱ \pm ۴'۱ - \sqrt{۱۵} \pm \sqrt{۱۵} - \frac{۵ \pm ۳}{۲} - ۱۷ - ۱۸ - ۱۹ - ۲۰ - ۲۱ - ۲۲ - ۲۳ - ۲۴ - ۲۵ - ۲۶ - ۲۷ - ۲۸ - ۲۹ - ۳۰ - ۳۱ - ۳۲ - ۳۳ - ۳۴ - ۳۵ - ۳۶ - ۳۷ - ۳۸ - ۳۹ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۲ - ۴۳ - ۴۴ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۷ - ۴۸ - ۴۹ - ۵۰ - ۵۱ - ۵۲ - ۵۳ - ۵۴ - ۵۵ - ۵۶ - ۵۷ - ۵۸ - ۵۹ - ۶۰ - ۶۱ - ۶۲ - ۶۳ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۶ - ۶۷ - ۶۸ - ۶۹ - ۷۰ - ۷۱ - ۷۲ - ۷۳ - ۷۴ - ۷۵ - ۷۶ - ۷۷ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۰ - ۸۱ - ۸۲ - ۸۳ - ۸۴ - ۸۵ - ۸۶ - ۸۷ - ۸۸ - ۸۹ - ۹۰ - ۹۱ - ۹۲ - ۹۳ - ۹۴ - ۹۵ - ۹۶ - ۹۷ - ۹۸ - ۹۹ - ۱۰۰$$

$$(۲) لا = ۱ = ما = ۳ = ی = ۵$$

$$یا لا = ۱ = ما = ۳ = ی = ۵$$

$$۶-۱ (۱) - \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۲} (۲) ۳، ۳، ۱ - ۶ - پہلی رقم ۱؛ فرق مشترک ۱$$

$$۸-۶-۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۷-۱۸-۱۹-۲۰-۲۱-۲۲-۲۳-۲۴-۲۵-۲۶-۲۷-۲۸-۲۹-۳۰-۳۱-۳۲-۳۳-۳۴-۳۵-۳۶-۳۷-۳۸-۳۹-۴۰-۴۱-۴۲-۴۳-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۰-۵۱-۵۲-۵۳-۵۴-۵۵-۵۶-۵۷-۵۸-۵۹-۶۰-۶۱-۶۲-۶۳-۶۴-۶۵-۶۶-۶۷-۶۸-۶۹-۷۰-۷۱-۷۲-۷۳-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷-۷۸-۷۹-۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴-۸۵-۸۶-۸۷-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲-۹۳-۹۴-۹۵-۹۶-۹۷-۹۸-۹۹-۱۰۰$$

$$۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۷-۱۸-۱۹-۲۰-۲۱-۲۲-۲۳-۲۴-۲۵-۲۶-۲۷-۲۸-۲۹-۳۰-۳۱-۳۲-۳۳-۳۴-۳۵-۳۶-۳۷-۳۸-۳۹-۴۰-۴۱-۴۲-۴۳-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۰-۵۱-۵۲-۵۳-۵۴-۵۵-۵۶-۵۷-۵۸-۵۹-۶۰-۶۱-۶۲-۶۳-۶۴-۶۵-۶۶-۶۷-۶۸-۶۹-۷۰-۷۱-۷۲-۷۳-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷-۷۸-۷۹-۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴-۸۵-۸۶-۸۷-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲-۹۳-۹۴-۹۵-۹۶-۹۷-۹۸-۹۹-۱۰۰$$

$$۱۳-۱۲-۱۱-۱۰-۹-۸-۷-۶-۵-۴-۳-۲-۱-۰-۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲-۱۳-۱۴-۱۵-۱۶-۱۷-۱۸-۱۹-۲۰-۲۱-۲۲-۲۳-۲۴-۲۵-۲۶-۲۷-۲۸-۲۹-۳۰-۳۱-۳۲-۳۳-۳۴-۳۵-۳۶-۳۷-۳۸-۳۹-۴۰-۴۱-۴۲-۴۳-۴۴-۴۵-۴۶-۴۷-۴۸-۴۹-۵۰-۵۱-۵۲-۵۳-۵۴-۵۵-۵۶-۵۷-۵۸-۵۹-۶۰-۶۱-۶۲-۶۳-۶۴-۶۵-۶۶-۶۷-۶۸-۶۹-۷۰-۷۱-۷۲-۷۳-۷۴-۷۵-۷۶-۷۷-۷۸-۷۹-۸۰-۸۱-۸۲-۸۳-۸۴-۸۵-۸۶-۸۷-۸۸-۸۹-۹۰-۹۱-۹۲-۹۳-۹۴-۹۵-۹۶-۹۷-۹۸-۹۹-۱۰۰$$

$$۱۵- لا' = ما' = \frac{د}{ر+ب+ج} یا \frac{لا}{ر-و} = \frac{ما}{ر-ب} = ک$$

جہاں کہ (ر) (ر+ب+ج) - ب - ج - ر - (ب) = د

۱۶- ایک میل فی گھنٹہ

$$۱۶- (۱) (ب+ج) (ج+ر) (ر+ب) (۲) \sqrt{\frac{۲-۳}{۲}} + \sqrt{\frac{۳-۵}{۲}}$$

$$۱۸- \frac{۳۵}{۹} ؛ ۲۲۶۸$$

$$۱۹- (۱) \frac{۱۰۵۶ \pm ۲۱}{۱۳}$$

$$(۲) لا = ما = \pm ارب ؛ \frac{لا}{ر+ب} = \frac{ما}{(ر+ب)-} = \frac{ارب}{ارب+و}$$

۲۲- اگت ۵ ؛ ۹

$$۲۳- \left\{ \frac{۱}{۲} (ن+۱+۲+۳+...+ن) - (ا+۲+۳+...+ن) \right\}$$

۲۴- مزدوری ۵۰ شلنگ ؛ روٹی ۶ پیس ۲۵- ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸

$$۲۶- (۱) \frac{ج (ر-ب)}{(ب-ج) ر} (۲) \frac{ارب (ج+د) - ج د (ر+ب)}{ارب - ج د}$$

۲۸- ۴۸۸ میل

$$۲۹- لا = ک = ما = ک = ی = ہک$$

جہاں کہ = ا' پس ک = ا' سہ' یا سہ'

۳۰- ۴۸۰ (۳۱-۳۳ نصف کراؤن' ۱۹ شلنگ' ۸ پیس ؛ یا

۳۴ نصف کراؤن' ۶ شلنگ' ۷ پیس

$$۳۲- ۱ = ۶ = ب = ۷ = ۴۳ - ۴۰ منٹ$$

$$۱ = - (ا + ب) - (ا + ب + با + با) - (ا + با + با + با)$$

$$\begin{cases} (۲) لا = ۳ یا ۴ \\ ی = ۶ یا ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} ما = ۴ یا ۳ \\ ع = ۴ یا ۶ \end{cases}$$

۲۵۷- کم از کم ۳ ر - ۲ مقام تک

۲۵۸- چائے ۲ شلنگ ۶ پنس؛ کافی ۸ شلنگ ۸ پنس

$$۲۶۲- ۲ ق - ۶ ف ر + ۲۴ س$$

۲۶۳- ۱۱ فیل مرغ، ۹ راج ہنس، ۳ بطنیں

۲۶۶- (۱) لا، ما، ی کی ترتیبیں حسب ذیل قیمتوں کی ہیں:-

$$\frac{۱}{۲} (ا + با + با + با - ۳ - با - ۲ - با - ۳) \quad \frac{۱}{۲} (ا + با + با + با - ۳ - با - ۲ - با - ۳)$$

$$(۲) لا = ما = ی = ۱؛ لا = \frac{ا + ب + ج}{ا - ب - ج}؛ وغیرہ ۲۶۶- صفر$$

۲۶۸- ۱۶ پادری جن کی اوسط عمر ۴ سال

۲۴ ڈاکٹر جن کی اوسط عمر ۳ سال

۲۰ وکیل جن کی اوسط عمر ۳۰ سال

$$۲۶۹- (ا - ب) (ا - ب) (ا - ب) = (ا - ب) (ا - ب) (ا - ب)$$

$$یا \quad ا - ب + ۲ - ا - ب - ا - ب - ا - ب = ۰$$

$$۲۷۰- لا = \pm \frac{۱}{ا + با + با + با}؛ وغیرہ = \pm \frac{ب + ج}{ا + با + با + با}؛ وغیرہ ۲۷۰- و$$

$$۲۷۴- (۱) (۱ - \frac{۲}{ا}) لوک (۱ - لا) ۲ - (۲) \frac{۱}{۱ - ج} \left\{ \frac{۱ + ن}{(۱ + ج)(۲ + ج) \dots (ن + ج)} - ۱ \right\}$$

$$۲۷۵ - (۱) لا = \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} = ۰$$

$$ما = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$ی = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$(۲) لا = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}, ما = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}, و = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$لا = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}, ما = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}, و = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$و = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$۲۷۶ - (۱) لا + ما + ج + د = ۱$$

$$۲۷۷ - (۲) لا + ما + ج + د = ۱$$

$$۲۷۸ - (۳) لا + ما + ج + د = ۱$$

$$۲۸۱ - ۲ - ۲۸۷ - (۴) لا + ما + ج + د = ۱$$

$$۲۸۹ - لا = \frac{(۱ - \frac{۲}{۳}) (۱ - \frac{۲}{۳}) \dots (۱ - \frac{۲}{۳})}{(۱ - \frac{۲}{۳}) (۱ - \frac{۲}{۳}) \dots (۱ - \frac{۲}{۳})} \text{ وغیرہ۔}$$

$$۲۹۱ - (۱) لا + ما + ج + د = ۱$$

$$۲۹۲ - (۲) لا + ما + ج + د = ۱$$

$$۳۰۰ - ۳ - ۳۰۶ - (۳) لا + ما + ج + د = ۱$$

$$یا ۴ میل سیر کی روزانہ ۴ گھنٹے کام کیا$$

فہرست اصطلاحات

جبر و متقابلہ حصہ دوم

| انگریزی | اُردو | انگریزی | اُردو |
|--------------------------|---------------|-----------------------|-------------------|
| A | | | |
| Advisable solutions | قابل قبول حل | Axes | محاور |
| Algebraical equivalent | جبر متبادل | Axioms | علوم متعارفہ |
| Algebraical form | صورت جبریمہ | B | |
| Alternating | متبادل | Bankers' discount | ساہوکاری ہتی |
| Ambiguity | اشتباہ | Biquadratic equations | مساوات درجہ چہارم |
| Ambiguities | مشتبہ علامتیں | C | |
| Amount | شرح | Certainty | یقینی |
| Analytical geometry | ہندسہ تحلیلی | Chance | اتفاق |
| Annuity | سالیانہ | Combination | اجتماع |
| A posteriori probability | احتمالِ موخر | Commensurable root | متوافق اصل |
| A priori probability | | Common ratio | مشترک نسبت |
| Arbitrary number | اختیاری اعداد | Compact form | منضبط شکل |
| Arithmetical order | ترتیب حسابی | Complete quotient | کامل خارج قسمت |
| Arithmetical progression | حسابی سلسلہ | Complex numbers | ملفوظ اعداد |
| Auxiliary series | | Components | اجزائے ترکیبی |
| | | Composite number | م مرکب عدد |
| | | Concurrent testimony | ہم عصر شہادت |

| انگریزی | اُردو | انگریزی | اُردو |
|-----------------------|---------------|---------------------------|------------------------------------|
| Congruence | استطابق | Determinant | مقطعہ (واحد) قطعاً (جمع) |
| Congruent | مستطابق | Dice | مہرہ |
| Consecutive | متصل | Discount | بستی |
| co-efficient | | Discriminating cubic | مینیکھی |
| Consecutive terms | مسلل رقوم | Divergence | انفاس |
| Conservative | قدامت پسند | Divergent | تقسع |
| Consonants | حروف صحیح | E | |
| Constituents (of | افزادی جزو | Elementary algebra | ابتدائی جبر و تقابلہ |
| a determinant) | | Elements of a determinant | مقطعہ کے ترکیبی جزو |
| Continuations | تسلل | Elimination | استطاف |
| Continued fraction | کسور مسلسل | Eliminant | مسطہ |
| Convergence | استدفاق | Equivalent function | تفاعل محلول |
| Convergent | مستحق | Expansion | تفصیل |
| Cycle | دور | Expression | جملہ |
| D | | F | |
| Deferred annuity | لمتوی سالیانہ | Figurate numbers | اعداد و شکل اشکالی اعداد |
| Deferred perpetuity | لمتوی دوامی | Fundamental | مسلمہ اعداد اساسی |
| Denary | عشری | G | |
| Denary scale | عشری پیمانہ | General term | عمومی قسم |
| Dependant | تابع | Generating function | تفاعل کویتی |
| Derivative | مستخرج | Geometrical methods | هندسی طریقے |
| Derived function | تفاعل مستخرج | H | |
| Descending powers | نزولی قوتیں | Harmonic mean | اوسط کویتی (واحد) اوسط کویتی (جمع) |
| Detached co-efficient | منفردہ سر | | |

| انگریزی | اُردو | انگریزی | اُردو |
|---------------------------|------------------|---------------------------|------------------|
| Harmonic progression | سلسلہ موسیقی | I. | |
| Homogeneous equations | مشابہات | Large integers | بڑے صحیح عدد |
| Homogeneous linear | متجانس خطی | Law of commutation | قانون مبادلہ |
| Homogeneous products | متجانس حاصل ضرب | Law of distribution | قانون تقسیم |
| Hydropathic establishment | | Laws of indices | قوانین توان نما |
| I | آبی شفابخانہ | Leading element | جزو رئیس |
| Incommensurable | تباہ | Lease | اجارہ |
| Inconsistent | غیر مطابقت | Liberals | حریت پسند |
| Indeterminate (equations) | غیر معین (مسائل) | Life annuity | حیاتی سالانہ |
| Inequalities | | Lim | نہا |
| Infinite | لا انتہا | Limiting values | انتہائی قیمتیں |
| Infinite series | لا انتہائی سلسلہ | Limits | حدود و انتہائیں |
| Infinity | لانہائی | Linear equations | خطی مساواتیں |
| Insertion | ادخال | Logarithmic series | لوگارتمی سلسلہ |
| Instalment | قسط | Lottery | قصر |
| Integral calculus | احصائے کمالات | M | |
| Integral function | صحیح تفاعل | Mean root | وسطی اصل |
| Integral values | صحیح قیمتیں | Minors (of a determinant) | صغائر (محدد) |
| Integers | صحیح اعداد | Modulus | مقیاس |
| Inverse probability | مقلوب احتمال | N | |
| Irrational parts | غیر نامی تھے | Natural numbers | طبعی اعداد |
| Irreducible | نا قابل تجزئہ | Nominal annual rate | نفاہی سالانہ شرح |
| | | Nonary | سبعی |
| | | Nonary scale | سبعی پیمانہ |

| انگریزی | انگریزی | انگریزی |
|--------------------|------------------|---------------------|
| Notation | ترقیم | Rational integ- |
| Numerator | شمار کنندہ | ral function |
| O | | Real quantity |
| Observation | مشاہدہ | Reciprocal |
| Occurrences | واقعات | Recurring series |
| Octahedral die | ہشت پہلوئی ٹیبلٹ | Resulting equation |
| Operations | اعمال | Reversion of series |
| Oscillating series | بہتری سلسلے | S |
| P | | Scale of relation |
| Partial fractions | کسور جزوی | Second term |
| Pentagonal | پنجمی | Septenary scale |
| Penultimate | ماقبل الآخر | Series |
| Perfect square | مربع کامل | Spades |
| Periodic contin- | دوری مسلسل | Suffixes |
| ued fractions | | Synthetic division |
| Polygonal numbers | کثیرضلعی اعداد | T |
| Polynomial | کثیرالارقام | Target |
| Positive integers | مثبت صحیح عدد | Tenant |
| Positive root | مثبت ہل | Terminating |
| Present value | قیمتِ حاضر | U |
| Prime | مفرد | Undetermined |
| Probability | احتمال | co-efficients |
| R | | V |
| Radix | اصل | Vanishing fractions |

اُسادد

منطق صحیح تقابل

حقیقی مقدار

مکافی متطاب

سلسلہ متوالی

مساواتِ حاصلہ

سلسلوں کی تقلیب

پیمائش رابطہ

دوسری رقم

پہاڑی سببی

سلاسل سلسلہ

مشکم

لاحقہ

ترکیبی تقسیم

چانداری کا جائزہ

ہشہ دار

مختتم

معلوم

کسور منہدم

اغلاطانا

جب سے مقابلہ

حصہ دوم

| صحیح | غلط | ۴ | ۳ | صحیح | غلط | ۴ | ۳ |
|------------|--------|----|----|----------------|----------------|------|----|
| ل | ل | ۲ | ۲۳ | جملہ | حلمہ | ۲ | ۱۰ |
| = | = | ۹ | // | ۲۲۶ | ۱۲۶ | ۱۲ | ۱۸ |
| ما | ما | ۶ | ۲۴ | ل-ر-ب) (ل-ر-ق) | ل-ر-ب) (ل-ر-ق) | ۱۱ | ۱۹ |
| اصل یعنی ج | اصل رہ | ۱۴ | ۲۵ | ل-ر-ق) | ل-ر-ق) | ۱۰ | ۳۵ |
| ن کے | ن کے | ۱۹ | ۵۲ | ل-ر-ق) | ل-ر-ق) | ۳ | ۳۷ |
| یہ ایک | یہ ایک | ۲۰ | // | ل-ر-ق) | ل-ر-ق) | ۶ | // |
| ما | ما | ۱۲ | ۶۲ | لا | ر | ۱۳ | ۳۸ |
| وا | وا | | | ل-ر-ق) | ل-ر-ق) | ۲۱۳۲ | // |
| لوک ی | لوک ی | ۲ | ۶۳ | ن-۲ | ن-۲ | ۱۳ | ۳۹ |
| لوک ی | لوک ی | ۱۳ | ۶۴ | ل | ل | ۲ | ۴۰ |
| لوک عن | لوک عن | | | صفر | صفر | ۱۵ | ۴۱ |
| ۱ | ۱ | ۱۱ | ۶۵ | صفر | صفر | | |
| (۱-لا) | (۱-لا) | | | | | | |

| صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط |
|--------------------|--------------------|------|-----|-------------------|-------------------|------|-----|
| قن قن-۱
لن لن-۱ | قن قن-۱
لن لن-۱ | ۱۲ | ۱۱۹ | و | د | ۶ | ۶۰ |
| $\frac{1}{+2}$ | $\frac{1}{+2} +$ | ۱۷ | = | و | ر | ۱۱ | ۵ |
| دنوں | دقوں | ۱۰ | ۱۳۰ | (۱-۲۲) | (۱-۲۲) | ۱۳ | ۷۲ |
| $\frac{1}{لن}$ | $\frac{1}{لن}$ | ۶ | ۱۳۴ | $\frac{1}{نہ}$ | $\frac{1}{نہ}$ | ۲ | ۷۳ |
| |+ | ۵ | ۱۳۷ | = | = | ۱۳ | ۷۷ |
| قن-۲ | ق-۲ | ۹ | ۱۳۸ | استدلال | استدلال | ۱ | ۷۹ |
| تب | تب | ۶ | ۱۳۹ | لازمًا | لازمًا | ۱۵ | ۸۱ |
| ج | ج | ۱۰ | ۱۴۷ | (ج+۱) | (ج+۱) | ۹ | ۸۳ |
| ج | ج | ۱۴ | ۱۴۸ | $\frac{من}{من+۱}$ | $\frac{من}{من+۱}$ | ۱۲ | ۵ |
| ب | ب | ۱۴ | ۱۵۰ | ق | ق | ۲ | ۸۷ |
| ب | ب | ۱۸ | ۵ | +۱ | +۱ | ۱۱ | ۹۳ |
| ب | ب | ۱۳ | ۱۵۱ | رقم | رقم | ۱۲ | ۱۰۰ |
| ب | ب | ۱۴ | ۵ | لاگ..... | لاگ..... | ۷ | ۱۰۸ |
| ج ب | ج ب | ۲ | ۱۵۲ | بنانے | بنانے | ۱۳ | ۱۱۳ |
| ج ب | ج ب | ۳ | ۵ | ک | ک | ۱۴ | ۵ |
| ج ب | ج ب | ۳ | ۱۵۴ | ہم | ہم | ۷ | ۱۱۴ |
| ۳ | ۳ | ۱۳ | ۱۵۶ | ق لا | ق لا | ۱۵ | ۵ |
| = | = | ۵ | ۱۵۸ | ا | ا | ۱۳ | ۱۲۰ |
| $\frac{1}{+2}$ | $\frac{1}{+2}$ | ۱۵ | ۱۶۰ | نکالتے | نکالتے | ۱۵ | ۱۲۳ |
| لن-۲ | لن-۲ | ۱ | ۱۶۷ | ۸۰۲ | ۸۰۳ | ۵ | ۱۲۴ |
| |+ | ۱۳ | ۵ | وال | وال | ۲ | ۱۲۶ |
| $\frac{قن}{لن}$ | $\frac{قن}{لن}$ | ۱۹ | ۵ | | | | |

| صحیح | غلط | صفحہ | خطا | صحیح | غلط | صفحہ | خطا |
|---------------------------------|---------------------------------|------|-----|---------------|-----------------|------|-----|
| ۶۴ - | + ۶۴ - | ۲۲۵ | ۷ | (۱) | (۲) | ۱ | ۱۶۹ |
| '۵۰' | '۲۵۰' | ۲۲۷ | ۱۲ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} +$ | ۲ | ۱۷۱ |
| $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | ۲۳۶ | ۱۳ | جو قی | جو قی | ۱۶ | ۱۷۴ |
| + ۲ | + ۳ | ۱۷ | ۱۷ | ۱ = | ۱ = | ۱۲ | ۱۷۸ |
| $\frac{4}{3 \times 2 \times 1}$ | $\frac{4}{3 \times 2 \times 1}$ | ۲۳۷ | ۱۱ | ث | ث | ۱۹ | ۱۷۹ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | ۲۳۸ | ۵ | ق | ق | ۱۷ | ۱۸۰ |
| رق - ق | رق - ق | ۲۵۲ | ۱۵ | نور | نور | ۲۰ | ۱۸۲ |
| (ق - ق) ب | (ق - ق) ب | ۲۵۷ | ۹ | ر | ر | ۶ | ۱۸۶ |
| فرا | فرا | ۲۵۸ | ۱۰ | م + ۲ - ۲ - ۲ | م + ۲ - ۲ - ۲ | ۸ | ۱۸۷ |
| '۱ = (۲)' | '۱ = (۲)' | ۲۵۹ | ۷ | ق = | ق = | ۵ | ۱۹۱ |
| ج | ج | ۲۶۱ | ۱۲ | - ۳۸۲ | شال | ۸ | ۱۹۲ |
| ے | ے | ۲۶۱ | ۱۶ | اور + و | اور + و | ۳ | ۱۹۳ |
| + | ÷ | ۲۶۲ | ۱۲ | قیمت | قیمت | ۱۷ | ۱۹۴ |
| جن | جن | ۲۶۲ | ۱۶ | (۷۰) | (۷۰) | ۱۷ | ۱۹۵ |
| استقرار | استقرار | ۲۶۶ | ۷ | ک | ک | ۲۰ | ۲۰۲ |
| $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | ۲۶۶ | ۷ | ارتھمٹک | ارتھمٹک | ۹ | ۲۰۳ |
| $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | ۲۶۹ | ۲۲ | | | ۱۲ | ۲۰۵ |
| $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | ۲۶۹ | ۲۲ | | | ۱ | ۲۰۹ |
| $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2})$ | ۲۷۰ | ۲ | | | ۳ | ۲۱۰ |
| لا | لا | ۲۷۱ | ۳ | | | ۱۷ | ۲۱۲ |
| ا + لا | ا + لا | ۲۷۱ | ۳ | | | ۲۲ | ۲۱۵ |
| آہاؤں | آہاؤں | ۲۷۱ | ۳ | | | ۸ | ۲۱۶ |
| ق - ن | ق - ن | ۲۷۱ | ۴ | | | ۱۶ | ۲۱۸ |
| ل - ن | ل - ن | ۲۷۱ | ۴ | | | | |

| صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط |
|--------------|--------------|------|-----|---|---|------|-----|
| کراؤں | کراؤں | ۲۳ | ۳۰۱ | ل ن - ۱ | ل ن ۲ | ۸ | ۲۷۷ |
| سروں | سروں | ۲۴ | " | $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ | $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ | ۱ | ۲۷۹ |
| سکوں | سکوں | " | " | $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ | $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ | ۱۰ | " |
| ہوگی | ہوگی | ۱۰ | ۳۰۲ | $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ | $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ $\frac{ب}{ب-ز}$ | ۱۰ | " |
| وَب | وَب | ۱۹ | ۳۰۳ | ل | ل | ۳ | ۲۸۰ |
| (و + ب) | (و + ب) | ۴ | ۳۰۴ | = | = | ۱۳ | ۲۸۲ |
| پدیر | پدیر | ۱۹ | " | ک | ک | ۷ | ۲۸۳ |
| کوئی نہ کوئی | کوئی نہ کوئی | ۱۵ | ۳۰۷ | $\frac{۲}{۱+۲}$ $\frac{۲}{۱+۲}$ $\frac{۲}{۱+۲}$ | $\frac{۲}{۱+۲}$ $\frac{۲}{۱+۲}$ $\frac{۲}{۱+۲}$ | ۳ | ۲۸۸ |
| پہلی | پہلی | ۱۲ | ۳۰۹ | عم = | عم - | ۴ | " |
| کے | کے | ۲۴ | ۳۱۰ | $\frac{ل}{ل+۱}$ | $\frac{ل}{ل+۱}$ | ۱۲ | " |
| ۳ یا ۷ | ۳ یا ۷ | ۱۱ | ۳۱۲ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | ۶ | ۲۹۰ |
| کتے | کتے | ۱۷ | ۳۱۳ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | ۶ | ۲۹۰ |
| موافق | یا موافق | ۲۴ | " | $\frac{۱}{۱+۱}$ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | ۶ | ۲۹۰ |
| پھینکا | پھینکا | ۵ | ۳۱۴ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | ۱۰ | ۲۹۲ |
| ہوے | ہوے | ۱۱ | " | $\frac{۱}{۱+۱}$ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | ۱۳ | ۲۹۳ |
| چار | چار | ۱۳ | ۳۱۸ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | $\frac{۱}{۱+۱}$ | ۶ | ۲۹۴ |
| کے | کے | ۵ | ۳۱۹ | کرتے | کرتے | ۵ | ۲۹۵ |
| اشیاء | اشیاء | ۱۳ | ۳۲۱ | ضرور | ضرور | ۳ | ۲۹۶ |
| ۱۰ = | ۱۰ = | ۲ | ۳۲۳ | احتمال | احتمال | ۱۴ | " |
| پہلے پہلے | پہلے پہلے | ۱۴ | ۳۲۶ | گیند | گیند | ۷ | ۳۰۰ |
| لاؤن | لاؤن | ۲۱ | ۳۲۸ | ۳ | ۳۰ | ۲۳ | " |
| منتج | منتج | | | | | | |
| قر | قر | | | | | | |

| صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط |
|-----------------|-----------------|------|-----|---------|---------|------|-----|
| جہ | جہ | ۱۲ | ۲۰۴ | کا | کے | ۲۰ | ۳۳۰ |
| جہ | جہ | ۱۸ | ۲۰۹ | ۲۶۴-اب | اب | ۱۱ | ۳۳۳ |
| جہ | جہ | ۱۸ | ۲۲۰ | جھوٹا | چھوٹا | ۱۸ | ۳۳۶ |
| فہ | فہ | ۱ | ۲۲۳ | ۵۰-۵۰ | ۵۰-۵۰ | ۱۰ | ۳۵۳ |
| فہ | فہ | ۱۳ | " | ۱۰ | ۱۰ | | |
| اصول | اصول | ۱۵ | ۲۲۹ | متجاش | متجاش | ۱۱ | ۳۵۴ |
| فن | فن | ۱۳ | ۲۳۷ | بہ | بہ | ۱۶ | " |
| ربط = | ربط = | ۱۹ | ۲۵۸ | بہ بہ | بہ بہ | ۱۰ | ۳۵۸ |
| ۲ | ۲ | ۱۱ | ۲۶۴ | بہ بہ | بہ بہ | ۲۱ | " |
| ۲ | ۲ | ۵ | ۲۶۶ | بہ بہ | بہ بہ | ۲ | ۳۵۹ |
| ۳ | ۳ | ۱ | ۲۶۸ | جہ | جہ | ۳ | ۳۶۰ |
| ۲۰ | ۲۱ | ۱۶ | ۲۷۶ | ... (۲) | ... (۲) | ۱۳ | " |
| ۲ | ۲ | ۱ | ۲۷۸ | اجزا | اجزائے | ۲ | ۳۶۹ |
| کر سٹ | کر سٹ | ۳ | ۲۸۷ | بہ | بہ | ۱۶ | " |
| ۱-۱+۱-۱+۱-۱+۱-۱ | ۱-۱+۱-۱+۱-۱+۱-۱ | ۱۵ | " | زیریں | زیریں | ۵ | ۳۸۰ |
| ۱-۱+۱-۱+۱-۱+۱-۱ | ۱-۱+۱-۱+۱-۱+۱-۱ | ۱۶ | ۲۹۸ | ۲ | ۲ | ۱۳ | ۳۸۱ |
| ۲ | ۲ | ۲۰ | ۵۰۲ | قدیم | قدیم | ۱۵ | ۳۹۳ |
| ۱-۱ | ۱-۱ | ۷ | ۵۱۲ | ن-اب | ن-اب | ۹ | ۳۹۴ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۵۱۹ | ۲-++ | ۲-++ | ۱۵ | ۳۹۶ |
| ۲ | ۲ | ۱۱ | " | مثال ۲ | مثال ۲ | ۲۱ | ۳۹۹ |
| کافی | کافی | ۵ | ۵۲۴ | (ج+ج) | (ج+ج) | ۲۱ | " |
| تعدادات | تعدادات | ۱۴ | " | ۱=ب=۱ | ۱=ب=۱ | ۹ | ۴۰۰ |
| (۱۰+۱۰+۱۰) | (۱۰+۱۰+۱۰) | ۱۸ | " | ۲ | ۲ | ۱۰ | ۴۰۱ |

| صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط | صحیح | غلط |
|---------------|---------------|------|-----|-------------------|-------------------|------|-----|
| فلا | فلا | ۶ | ۵۴۹ | کر | کر | ۳ | ۵۲۶ |
| م ن - ر ن - ا | م ن - ر ن - ا | ۱۴ | ۵۵۱ | ل | ل | ۱۸ | ۵ |
| ب | ب | ۱۵ | ۵۵۵ | | | ۵ | ۵۲۹ |
| ب ج - | ب ج = | ۲ | ۵۵۲ | | | | |
| $\frac{۸}{۹}$ | $\frac{۲}{۹}$ | ۱۲ | ۵۶۱ | | | ۸ | ۵۳۸ |
| ۵ لا - ۸ لا | ۵ لا - ۸ لا | ۱ | ۵۶۶ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۲ | ۵۳۹ |
| (۵) | (۵) | ۳ | ۵ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۵ | ۵ |
| $\frac{۳}{۳}$ | $\frac{۳}{۳}$ | ۳ | ۵۶۸ | $\frac{۲۸}{۱۳}$ | $\frac{۱۸}{۱۳}$ | ۹ | ۵۴۱ |
| ف (م) + (ب ج) | ف (م) + (ب ج) | ۱۰ | ۵ | - ۵۵۱۹ | - ۵۵۱۹ | ۱۳ | ۵۴۲ |
| ± ۱۳ | ± ۱۳ | ۱۲ | ۵ | $\frac{۱}{۲} + ۱$ | $\frac{۱}{۲} + ۱$ | ۳ | ۵۴۵ |
| $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۱۵ | ۵۶۲ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۸ | ۵ |
| . | . | ۰ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۱۱ | ۵ |

